DIALOGIQUE DE LA NON NORMALITÉ[1]

Shahid Rahman
Université Lille

A la fin du dix-neuvième siècle, Hugh MacColl (1837-1909), le père du pluralisme en logique formelle, a tenté de formuler une logique modale qui puisse se substituer à la sémantique de l'implication matérielle, en vogue durant l'ère post-booléenne. Il semble que dans certains de ses essais, MacColl a tenté de construire des systèmes excluant la règle de nécessitation[2]. Cette idée que la nécessité logique n'a pas une portée universelle — autrement dit qu'aucune logique ne peut s'appliquer à tout contexte d'argumentation — semble étroitement liée, et peut-être même est essentielle, à sa philosophie pluraliste de la logique[3]. Quelques années plus tard, Clarence Irwin Lewis fournissait l'axiomatique de plusieurs de ces logiques, et depuis lors, les critiques de l'implication matérielle ont nourri un intérêt croissant pour ces systèmes modaux appelés « non-normaux ». Quand Saul Kripke développa pour elles une sémantique de « mondes impossibles », de façon à distinguer entre nécessité et validité, ces logiques gagnèrent une forme de respectabilité[4]. Comme il est bien connu, durant les années soixante-dix, on se servit des systèmes non-normaux dans le cadre de l'interprétation épistémique de la logique modale, en particulier dans les travaux de Jaakko Hintikka et Veikko Rantala.[5] Les mondes impossibles constituent un objet d'étude intensive et sont à la racine de nombreux développements dans le contexte des

---

[1] La version française de cet article a été préparée par Laurent Keiff.
[2] Malheureusement, il semble n'avoir pas réussi. Read [1998], à la différence de Storrs MacCall's ([1963] et [1967]) pense que la reconstruction de la logique modale de MacColl donne T et non un système non normal.
[3] Cf. Grattan-Guinness [1998], Rahman [1997], [1998], [2000], Read [1998] et Wolenski [1998].
[4] Cf. Kripke [1965].
[5] Cf. Hintikka [1975] et Rantala [1975]. Voir aussi Cresswell [1972] et Girle [1973].

logiques de la pertinence et paraconsistantes, en particulier au sein de la « Saint-Andrews – Australasian connection », avec les travaux de Graham Priest, Stephen Read, Greg Restall et Richard Routley-Sylvan. De nos jours, bien que le lien avec les questions d'omniscience semble s'être distendu, l'étude des logiques non normales connaît un nouvel essor, motivé par l'étude des arguments contrelogiques[6].

Le but de cet article est de donner une interprétation dialogique des logiques modales non-normales, qui nous suggèrera des pistes d'exploration au-delà de la non normalité « classique ». Cette interprétation est liée à la discussion de deux problèmes, savoir : (i) l'usage des arguments contrelogiques comme défense minimaliste du pluralisme logique (ou « pluralisme pour moniste »), en suivant la voie ouverte par MacColl ; et (ii) les difficultés que soulève l'application de ce que l'on appelle la « *stratégie Hintikka* », ainsi que l'utilisation des langages hybrides, lorsque l'on construit les systèmes de tableaux pour les logiques modales non normales.

1. PLURALISME POUR MONISTE ET ARGUMENTS CONTRELOGIQUES

Convincitur ergo etiam insipiens esse vel in intellectu ...
Anselm of Canterbury,
Proslogion, capitulum II, Ps 13, 1, 52, 1

(Ainsi, même celui qui n'y entend rien sera convaincu
qu'au moins en intellect …)

[6] Ce néologisme assez disgracieux traduit le terme anglais « counterlogicals », dont la construction et la signification sont analogues à celles de « counterfactuals ». Il faut distinguer « contrelogique » qui relève du domaine logique exclusivement, de « contrepossible » qui concerne les sciences formelles en général.

1.1 LA VRAIE LOGIQUE EST PRIÉE DE SE FAIRE CONNAÎTRE

Concevoir des situations dans lesquelles la totalité des vérités logiques ou mathématiques ne vaut pas est une pratique courante dans les sciences formelles. Cependant, il est bien difficile de formuler les conditions précises auxquelles on peut concevoir une théorie adéquate des arguments contre-possibles. Hartry Field a écrit quelques lignes à ce propos, dans le cas des mathématiques :

> « It is doubtless true that nothing sensible can be said about how things would be different if there were no number 17; that is largely because the antecedent of this counterfactual gives us no hints as to what alternative mathematics is to be regarded as true in the counterfactual situation in question. If one changes the example to 'nothing sensible can be said about how things would be different if the axiom of choice were false', it seems wrong …: if the axiom of choice were false, the cardinals wouldn't be linearly ordered, the Banach-Tarski theorem would fail and so forth. » (Field [1989], pp. 237).

Ces lignes expriment clairement la motivation centrale d'une théorie des contrepossibles en sciences formelles. Il s'agit de permettre la construction d'un système alternatif, où l'indépendance aussi bien que les relations entre les axiomes d'un système formel donné pourraient être étudiées. Si nous pouvions concevoir des situations contrepossibles, où certains axiomes ne seraient pas vrais, ou mieux encore, construire des systèmes formels alternatifs sans les axiomes en question, alors nous pourrions gagner une grande quantité d'information à propos du système « réel ». Par l'étude des propriétés logiques des systèmes alternatifs, nous pourrions apprendre par exemple quels sont les théorèmes de notre système « réel » qui dépendent des axiomes manquants dans un système alternatif[7]. Il faudrait encore ajouter qu'un bref coup d'œil à l'histoire des mathématiques témoingnerait de la fréquence de tels raisonnements dans la pratique courante des sciences formelles.

---

[7] Voir Read [1994], pp. 90-91 et Priest [1998], p. 482.

Les arguments contrepossibles en logique motivent exactement le même genre de recherches. Nous avons beaucoup appris de la logique intuitionniste, et même l'*insipiens* moniste classique en logique a appris des choses sur sa propre logique dans la discussion avec les antiréalistes. Cela semble un fait généralement accepté, mais pourquoi devrions-nous nous en tenir là ? Avec les logiques libres (*free logics*), nous avons appris des choses sur l'engagement ontologique des quantificateurs. Les logiques paraconsistantes, nous ont fourni les moyens de distinguer inconsistance et trivialité[8]. La logique connexive nous a donné la possibilité d'exprimer dans le langage objet qu'une proposition est contingente. Les logiques de la pertinence ont montré qu'il n'est pas toujours avisé de distinguer les particules « si – alors » appartenant respectivement au langage objet et au métalangage. Grâce aux logiques IF et épistémique dynamique, nous avons appris à contrôler les arguments mettant en jeu différents flux d'information. Des logiques linéaires, nous avons appris à raisonner avec des ressources limitées. Et ainsi de suite…

Toutes ces logiques alternatives sont-elles réelles, ou bien même sont-elles la « vraie » logique ? En fait, la simple construction mentale (leur être *in intellectu*) de ces systèmes est suffisante pour en justifier l'étude : cette étude est féconde, ce que l'on peut minimalement comprendre comme le fait de fournir une meilleure compréhension de la structure de la logique « de référence ». La construction de logiques alternatives, qui dans ce dernier cas est le résultat de modifications apportées à la logique « réelle » de départ, peut être conçue suivant la stratégie substructurelle : les changements de logique sont des changements structurels de la notion de conséquence logique.

Dans ce qui va suivre, je donnerai une interprétation dialogique des logiques modales non normales, qui devrait suggérer les contours d'une défense minimale du pluralisme, dans l'esprit de ce que nous venons d'affirmer.

---

[8] Aristote utilisait déjà des arguments contrelogiques dans son étude du principe de non contradiction, dans lequel il voyait l'axiome principal de la logique.

Dans cette interprétation, nous introduirons la paire de prédicats « *standard*/*non-standard* », qui complètera la paire habituelle « *normal*/*non-normal* ». La première paire porte sur les *logiques*, alors que la seconde porte sur les *contextes*[9]. Ainsi on dira, par exemple, « la logique standard Lk dans le contexte argumentatif m ». *Normal* qualifiera les contextes dans lesquels le seul choix de logique possible est celui de la logique standard. Les contextes non normaux, au contraire, laissent la possibilité de choisir une logique sous-jacente différente de la logique standard.

Avant d'entrer dans les détails, il faut encore distinguer deux types d'argument contrelogique.

a. Supposons qu'un logicien intuitionniste raisonne ainsi :
   Si le tiers-exclu était valide dans ma logique, alors les lois de de Morgan seraient valides (dans ma logique) dans les deux sens.

b. Le même logicien intuitionniste :
   Si le tiers-exclu était valide dans la logique non standard Lk, alors les lois de de Morgan seraient valides (dans la logique Lk) dans les deux sens.

Dans le premier cas, la logique alternative – en l'occurrence la logique classique – est une extension conservative de la seconde – ici la logique intuitionniste. En conséquence, tout théorème de la logique standard serait aussi un théorème de la logique non standard. Dans le second cas, cette relation semble moins plausible : Lk pourrait combiner des propriétés de la logiques classique avec d'autres, qui pourraient être très différentes de celles de la logique intuitionniste. La situation est la même dans les cas suivants, où l'on présume que la logique standard est classique, et que la logique alternative en est une restriction :

---

[9] Les contextes sont l'équivalent dialogique des mondes dans les sémantiques du style de Kripke.

c. *Si le tiers-exclu n'était pas valide dans ma logique, alors un des sens des lois de de Morgan ne serait pas valide non plus (dans ma logique).*
d. *Si le tiers-exclu n'était pas valide dans la logique Lj, alors un des sens des lois de de Morgan ne serait pas valide non plus (dans Lj).*

Ce caractère des raisonnements contrelogiques fait de la stratégie substructurelle (parente du concept même de dialogique) un cadre raisonnable pour les reconstruire : le changement de logique doit être conçu comme un changement des règles structurelles du dialogue[10].

Dans ces exemples, la délimitation précise d'une logique est une condition locale du raisonnement. Cependant, le conditionnel qui constitue la structure même de l'argument contrelogique semble suivre une autre logique. Celle-ci serait une forme de métalogique capable d'exprimer les changements des hypothèses locales déterminant la logique du contexte, et de produire des raisonnements à partir de conditionnels comme ceux des exemples. Le point intéressant ici est que la logique classique ne possède aucun privilège de statut. Celle-ci peut bien être la métalogique adéquate dans bien des cas, mais elle est certainement impuissante ici.

1.2 DIALOGIQUES NON NORMALES

Motivation

Appelons *non-standards* les contextes d'argumentation où vaut une logique différente de celle qui a été établie comme *standard*. Dans ces conditions, le fait que la règle de nécessitation soit absente des logiques non normales est interprété comme la traduction du

[10] Cette stratégie, développée dans Rahman/Keiff [2004], peut être implémentée implicitement ou explicitement. La formulation implicite présuppose que les règles structurelles sont exprimées à un autre niveau que les règles pour les constantes logiques qui font partie du langage-objet. La formulation explicite se fonde sur une propositionalisation des règles structurelles, faisant usage soit du langage de la logique linéaire, soit du langage modal hybride, à la manière de Blackburn [2001].

fait qu'aucun argument logiquement valide ne saurait être démontré universellement valide, c'est-à-dire vrai dans tout contexte et pour toute logique.

Il existe déjà un certain nombre de logiques permettant de former des arguments reposant sur une telle relativité de la validité. Leur stratégie repose sur l'idée simple que la validité logique concerne les contextes d'argumentation où la logique est standard, et non sur ceux que l'on peut imaginer, dotés d'une logique non standard. Il suffit alors de restreindre ses arguments à la notion de validité déterminée par la logique standard. Il y a cependant une stratégie plus audacieuse : définir la validité d'une formule comme sa vérité dans tous les contextes, que la logique y soit standard ou non standard. Le produit d'une telle stratégie est clairement pluraliste : aucun argument logique n'y est inconditionnellement nécessaire.

Quoi qu'il en soit, étant donné un ensemble de contextes, comment pourrons-nous reconnaître ceux dont la logique est standard ? Une méthode de détermination dynamique consiste à laisser les joueurs des dialogues modaux choisir, en même temps que le contexte, la logique (propositionnelle) sous-jacente au contexte. Le proposant (**P**) détermine la logique de référence, c'est-à-dire la logique standard. L'opposant (**O**) peut, dans certaines circonstances, choisir un contexte dont la logique propositionnelle diffère de la logique standard. Il y a cependant quelques restrictions très naturelles aux choix de **O**. Admettons que, dans un contexte donné, **O** a *explicitement concédé* que **P** fixe le standard. En d'autres termes, **O** a concédé que les formules en jeu doivent être jouée dans les conditions structurelles qui déterminent la logique standard. Nous appellerons « normal » un tel contexte. Ainsi O a concédé que le contexte est normal, ou plutôt que les conditions d'évaluation des formules dans ce contexte sont normales. Dans ce cas **O** ne peut choisir la logique lorsqu'il introduit un nouveau contexte : il doit s'en tenir au standard fixé par **P**. C'est là la signification de la concession : **P** a le choix de la logique.

Il faut être attentif ici au fait que « normal » et « standard » n'ont pas le même sens : il existe des contextes non normaux dans lesquels la logique est standard. La notion de normalité désigne une contrainte dans le choix de la logique sous-jacente aux contextes introduits.

Dialogiques pour S.05, S.2 et S3

La question principale est donc de déterminer dynamiquement, c'est-à-dire au cours du processus du dialogue, quels sont les contextes dont **O** a concédé la normalité, et quels sont ceux au contraire qu'il peut présumer non-normaux, à partir desquels il a la possibilité d'introduire des contextes dont la logique sous-jancente est différente de la logique standard.

Le processus de détermination doit être réglé au niveau structurel (à moins que nous ayons affaire à un système de dialogues où les contextes d'argumentation sont donnés et classés d'avance, ainsi que leurs logiques propositionnelles sous-jacentes respectives). Je discuterai d'abord la version informelle et implicite des règles structurelles correspondantes, et dans la section suivante, je montrerai comment construire un système de tableaux qui implémente ces règles, rendant explicite la notion de validité pour les dialogiques non normales. Avant de formuler la règle générale de détermination de la normalité des contextes, introduisons quelques définitions :

Normalité comme condition : nous dirons qu'un contexte m est *normal* si, et seulement si, il n'autorise pas le choix d'une logique propositionnelle sous-jacente pour les modalités de m autre que la logique standard. Dualement, un contexte est *non normal* si, et seulement si, il autorise le choix d'une nouvelle logique.

Logique standard : **P** fixe le standard, c'est-à-dire que **P** fixe la logique propositionnelle qui sera considérée comme standard, et par rapport à laquelle les alternatives peuvent être choisies.

Clôture des dialogues : Un dialogue ne peut fermer qu'à la condition qu'il contienne les coups (**P**)*a* et (**O**)*a*, et que ces coups ne correspondent pas à des jeux dont la logique est différente.

Règles de particule :

Les joueurs ne choisissent pas seulement les contextes, mais aussi les logiques sous-jacentes aux modalités dans les contextes choisis.

, ◊	*Attaque*	*Défense*
A m (A a été asserté dans le contexte m dont la logique sous-jacente est *Lk*)	**? n_{Lj} m (dans le contexte m l'autre joueur attaque en choisissant un contexte accessible n et sa logique *Lj*)**	**A_{Lj} n**
◊A m (◊A a été asserté dans le contexte m dont la logique sous-jacente est *Lk*)	**?◊ m**	**A_{Lj} n (le défenseur choisit le contexte accessible n et sa logique *Lj*)**

Ou, pour une notation plus formelle en termes d'état de jeu (voir annexe) :

Règle de particule : De A suit $\langle R, \sigma, A, \lambda^*A_{Lj/}\ n\rangle$, en réponse au coup ? $_{/Lj}$ n de l'attaquant, dans le contexte m (logique sous-jacente ***Lk***) et où $\lambda^*A_{L/}n$ est l'assignation du contexte n (logique sous jacente ***Lj***) à la formule A, n et ***Lj*** sont choisis par l'attaquant.

Règle de particule ◊ : De ◊A suit $\langle R, \sigma, A, \lambda^*A_{Lj/}\ n\rangle$, en réponse au coup ? $_{/Lj}$ n de l'attaquant, dans le contexte m (logique sous-jacente ***Lk***) et où $\lambda^*A_{L/}n$ est l'assignation du contexte n (logique sous jacente ***Lj***) à la formule A, n et ***Lj*** sont choisis par le défenseur.

La relation d'accessibilité est définie par les règles structurelles appropriées, fixant la sémantique globale (voir appendice). Pour engendre une dialogique modale non normale, il faut encore les règles structurelles suivantes :

(SR-ST10.O5) (règle SO5): **O** peut choisir une logique sous-jacente non standard en choisissant un (nouveau) contexte n en attaquant une formule de **P** de forme A ou en défendant une formule de forme ◊A assertée en m si, et seulement si, m est non normal.

P choisit lorsque le contexte est normal, et choisira toujours la logique standard, mais il ne peut changer la logique sous-jacente d'un contexte lorsqu'elle a été générée par **O**.

La logique sous-jacente aux modalités du contexte initial est par hypothèse la logique standard.

Trois hypothèses complètent cette règle :

Hypothèses SO5

- Le contexte initial du dialogue est normal.
- La logique standard choisie par **P** est la logique classique ***Lc***.
- Aucun autre contexte que le contexte initial n'est normal.

La dialogique résultant de ces règles, augmentées de celles de T, est une reconstruction de la logique connue sous le nom de S.O5. Dans ce système, la validité est définie par rapport au standard de la logique classique, et tout contexte nouveau introduit dans le jeu peut permettre à O de changer de logique. Il est clair que (*a*∨□*a*) par exemple est valide. Toute proposition de forme *A* (avec A une tautologie de Lc) est valide : le contexte initial normal n'autorise pas O à changer de logique, tout contexte généré à partir de lui aura pour règle SR-ST2C (voir l'annexe). La formule (*a*∨□*a*) au contraire n'est pas valide. **P** perdra lorsque **O** introduira le second contexte avec pour règle sous-jacente la règle structurelle intuitionniste SR-ST2I:

contextes	**O**			**P**			contextes
					(a∨□a)	0	$1_{\{Lc\}}$
$1_{\{Lc\}}$	1	<? $_{/1.1}$>	0		(a∨□a)	2	$1.1_{\{Lc\}}$
$1.1_{\{Li\}}$	3	<? $_{/1.1.1\{Li\}}$>	2		a∨□a	4	$1.1.1_{\{Li\}}$
$1.1.1_{\{Li\}}$	5	<?∨>	4		□a	6	$1.1.1_{\{Li\}}$
$1.1.1_{\{Li\}}$		a	6		—		$1.1.1_{\{Li\}}$

O gagne en changeant au coup (3) les règles classiques (Lc) en règles intuitionnistes (Li).

Le système S2 est plus intéressant que S0.5 dans la mesure où la détermination de la normalité des contextes est dynamiquement déterminée durant le dialogue. Par hypothèse le contexte initial est normal, et la règle SR-ST10.O5 vaut en général, mais on ajoute :

(SR-ST10.2) (règle S2) :

- Si **O** a asserté dans le contexte ***m*** une formule de forme *A* (ou si **P** a asserté en ***m*** une formule de forme ◊*A*), alors le contexte ***m*** *peut* être considéré comme normal**.** On appelle (**O**) *A* et (**P**)◊*A* *formules de normalité.*

- **P** ne peut changer la logique d'un contexte donné, mais il peut induire le retrait par **O** du choix d'une logique non standard en le forçant à concéder que le contexte en question est normal.
- Un contexte normal peut seulement être généré à partir d'un contexte normal.

Les deux premiers points établissent qu'une formule comme B pourrait être assertée avec succès par **P** à la condition qu'une autre nécessité, A par exemple, soit déjà concédée. Dans ce cas, **O** sera forcé de concéder que le contexte est normal, et cette normalité justifiera la preuve de B dans la logique standard. Le troisième point prévient la trivialisation de ce processus : des formules telles que (**P**) $\lozenge A$ ***m***, ou (**O**) $\lozenge$ A ***m*** ne doivent pas engendrer une normalité d'elles-même, si ***m*** n'a pas encore été concédé normal. La normalité de ***m*** doit venir de l' « extérieur » de la portée de (**P**) … ***m*** et (**O**) $\lozenge$… ***m***.

Dans notre perspective, ceci est plus intéressant que S.05, parce que le statut des contextes devient l'objet d'une question dont la réponse est élaborée dans la dyamique du dialogue. On peut même obtenir certaines itérations de la modalité, comme $((a\rightarrow b)\rightarrow(a\rightarrow b))$, qui n'est pas valide en S0.5, mais l'est en S2 : le premier contexte est normal et sa logique sous-jacente est classique, par hypothèse, et le second contexte est normal aussi car **O** y concèdera a. Puisque **O** a concédé la normalité, il ne peut faire autrement que choisir la logique classique, ce qui donnera la victoire à **P**. Si l'on ajoute la transitivité à S2 on obtient S3.

Dialogiques pour E.05, E2 et E3.

L'intérêt des logiques présentées dans la section précédente est qu'elles prennent en compte l'existence des logiques non standard, mais lorsqu'il faut décider de la validité d'un argument donné, seule la logique standard entre en ligne de compte. Nous allons motiver maintenant un concept moins conservateur, à savoir une famille de systèmes dans lesquels une formule est dite valide si, et seulement si, elle est vraie dans tout contexte, qu'il soit réglé par une logique standard ou non. On connaît ces logiques sous le nom de E. Dans les systèmes E, aucune formule de forme A n'est valide, quelle que soit A.

Supposons que l'on modifie S.05 de telle manière que toute modalité induise un changement de logique. Cette logique, appelée E.05, n'est malheureusement pas très intéressante : une formule y est valide si, et seulement si, elle est valide dans une logique non modale ($(a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow b)$, par exemple, n'est pas E.05-valide). Les modalités ne semblent pas avoir d'intérêt dans cette logique, et on peut la considérer comme une sorte de cas minimalement modal.

Autre cas, plus intéressant : abandonner l'hypothèse de normalité du premier contexte dans S2 – autrement dit, utiliser SR-ST10.O5 et SR-ST10.2 mais sans la première et la troisième hypothèse de S0.5. $(a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow b)$ est alors valide (ce qui, notons-le, nous donne une condition plus faible que K pour la validité de cette formule : on n'a pas besoin de faire l'hypothèse (implicite dans K) que les différents contextes ont la même logique sous-jacente). De la même manière, il est possible de produire des versions de D, etc… Il semble bien que E2 soit le langage adéquat, dans lequel le pluraliste peut s'essayer à formuler des énoncés portant sur la validité des formules sans faire l'hypothèse que cette validité est de portée universelle.

En fait, jusqu'ici, notre interprétation des modalités non normales n'offre qu'une manière de déterminer la portée de la validité des arguments dans des situations contrelogiques, où il n'existe pas de moyen terme entre ce que l'on considère standard et ce qui est non standard. D'autre part, la dialogique nécessaire à l'exploration des aspects les plus intéressants des contrelogiques ne semble pas correspondre à ce que l'on vient de voir. C'est pourquoi dans la section suivante, je voudrais suggérer quelques distinctions supplémentaires, de façon à affiner notre système.

Au-delà de la non-normalité.

Reprenons encore une fois notre exemple (où la logique classique est le standard) :

Si le tiers-exclu n'était pas valide dans ma logique, alors un des sens de la double négation ne serait pas valide non plus (dans ma logique).

Une formalisation possible consiste à traduire non valide par « non nécessaire ». Le problème de cette traduction apparaît avec l'exemple suivant : si **P** ne change pas de logique, il peut gagner un dialogue pour le conditionnel négatif, disons dans S2, de façon triviale. En fait, **O** attaque le conditionnel en concédant la protase, **P** se défend en assertant l'apodose, et après des attaques mutuelles sur les négations, **P** gagne en défendant le tiers-exclus dans la logique classique. Un tel argument ne semble pas excessivement intéressant. Cela vient du fait que dans l'interprétation que nous avons donnée, **P** ne peut changer la logique standard une fois qu'elle a été fixée. De façon générale, c'est une hypothèse raisonnable, parce que la validité devrait être définie par rapport à un standard, et qu'on ne peut laisser ce standard ouvert à n'importe quel changement. D'autre part, si la structure de l'argument (dans le dialogue) manque de pertinence, celle-ci ne concerne que la formule concédée dans le langage objet : dans notre cas, la double négation. Mais ce qui est pertinent, et ce qui est utilisé dans le dialogue, c'est la concession que la logique standard se joue avec les règles classiques. Après tout, pourquoi **P** voudrait-il changer de logique s'il peut gagner facilement avec le standard qu'il a lui-même défini ?

Afin d'implémenter une dialogique adéquate pour les arguments contrelogiques, il faudrait tolérer un certain degré de liberté dans la détermination du standard, ce qui peut se faire sans trop de difficulté et introduit des considérations de pertinence (qui sont bienvenues). Ainsi une logique standard donnée peut être remplacée par une logique plus faible (c'est-à-dire une logique dont toutes les formules valides sont aussi valides dans la logique forte, mais non inversement). Il est vrai que le problème reste entier : il n'est guère plausible que **P** change de standard pour une logique plus faible, une victoire triviale n'en est pas moins une victoire. Deux possibilités s'offrent à nous :

La première est de déterminer avant le dialogue quels sont les contextes qui seront soumis aux règles standard, et quels sont ceux qui seront soumis à une restriction de ces règles. Autrement dit : fixer un modèle.

L'autre possibilité est de laisser **O** choisir une restriction conservative de la logique que **P** a fixée comme standard :

(SR-ST10.2) *:

- Si **O** a asserté dans un contexte m une formule de forme A (ou si **P** a asserté en m une formule de forme $\Diamond A$), alors le contexte m *peut* être considéré comme normal. Dans ces conditions, **O** peut choisir une restriction de la logique standard, et **P** doit suivre les restrictions de **O** dans le choix de la logique standard.
- Un contexte normal peut seulement être généré à partir d'un contexte normal.

Dans notre exemple, **O** choisira la logique intuitionniste, et **P** aura alors besoin de la concession de la double négation s'il veut gagner le tiers-exclus. Une manière de comprendre cela est de considérer que **O** en réalité teste quelles sont les règles substructurelles redondantes pour prouver la formule. Mais une telle restriction peut ne pas être suffisante.

Dans notre exemple, on pourrait aller jusqu'à autoriser les restrictions dans le cas du contexte initial, dans S.05. De plus, on pourrait abandonner la seconde hypothèse S.05 et laisser **P** choisir une logique standard arbitraire. Par exemple, pour cet argument :

Si la transitivité ne s'appliquait pas dans ma logique, alors je ne pourrais pas gagner un dialogue pour $a \rightarrow a$ *(dans ma logique).*

Supposons que la logique standard soit S4. Nous aurions alors à utiliser un nouvelle notation pour distinguer les modalités qui définissent la logique standard et qui sont standard, et celles qui sont en usage dans la logique non normale correspondant à l'argument contrelogique. On écrira « Δ » (respectivement « ∇ ») pour la nécessité (respectivement la possibilité) dans la logique standard. Utilisons d'autre part le langage hybride de Blackburn pour « propositionnaliser » les propriétés de la relation d'accessibilité. On pourrait alors écrire :

$\square$ $(\nabla\nabla\nu_i \to \nabla\nu)_i$ *(transitivité) (dans ma logique S4)* $\to$ $\square$ $(\Delta a \to \Delta\Delta a)$ *(dans ma logique S4).*

Si SR-ST10.2* s'applique, alors **O** choisira, par exemple, K et **P** gagnera. Dans ce genre de dialogue, l'Opposant travaille de façon plus constructive que d'ordinaire, où son seul rôle est de chercher à réfuter son adversaire. En fait, son rôle ici est de trouver les conditions minimales auxquelles on peut valider le conditionnel contrelogique. Il y a d'ailleurs déjà un travail en cours concernant la dialogique adéquate pour déterminer les conditions structurelles minimales en logique modale (normale). Ces dialogues ont pour nom dialogues de recherche de conditions (SSD, en anglais *structure seeking dialogues*) et ont été formulés dans Rahman/Keiff [2004]. Dans ces dialogues, le rôle constructif de l'Opposant est mis en œuvre explicitement[11].

Voici un autre exemple :

Si le principe de non contradiction n'était pas valide dans ma logique, alors un des sens de la double négation ne serait pas valide non plus (dans ma logique).

Une autre manière de formaliser cela serait de mettre la négation dans la portée d'un opérateur de nécessité :

S'il était nécessaire que le principe de non contradiction ne soit pas valide dans ma logique, alors il serait nécessaire qu'un des sens de la double négation ne soit pas valide non plus (dans ma logique).

---

[11] Dans le cas des SSD, pour une thèse *A*, P défend qu'un ensemble déterminé d'éléments δ_i (d'un ensemble donné Δ de règles structurelles) est la condition structurelle minimale de la validité de *A*. Informellement, l'idée est que ces assertions structurelles (*structural statements*) peuvent être attaquées de deux manières. D'abord, en concédant les conditions δ_i, dont le joueur X affirme qu'elles sont minimales, et en demandant à X de prouver *A*. Ensuite, en contre argumentant que l'on peut gagner un dialogue pour *A* avec un sous ensemble de conditions de rang inférieur dans Δ. Dans ce cas, le jeu se poursuit avec un sous dialogue, où l'attaquant commence, avec pour rôle de défendre la formule A sous condition des hypothèses structurelles δ_j, avec $\delta_j \neq \delta_i$ et δ_j de rang inférieur à δ_i. Puisque c'est l'attaquant qui commence, c'est maintenant lui qui doit jouer sous restriction formelle (règle SR-ST4, voir Annexe). Voir les détails dans Rahman/Keiff [2004].

Si on joue encore avec la règle SR-ST10.2*, alors **O** choisira une forme de logique paraconsistante (par exemple P1 (Sette)). Il est clair que l'Opposant perdra, mais les choix alternatifs donneraient à **P** une stratégie de victoire triviale.

Si, au lieu d'utiliser SR-ST10.2*, nous laissons libre le choix de la logique standard, **P** pourrait alors choisir n'importe quoi comme standard, et l'on obtiendrait la validité de n'importe quoi. Ce n'est peut-être pas le rôle du logicien de prévenir cela, mais l'application de la règle SR-ST10.2* et des SSD correspondants est sans doute utile ici, laissant à **O** le soin de trouver les « bonnes » conditions structurelles pour tester la validité de la formule.

On peut encore présenter les choses de façon différente. Dans les dialogues des paragraphes précédents, le rôle de **O** est de tester si la thèse ne repose pas sur l'hypothèse subreptice que sa validité s'étend au-delà des limites de la logique standard. Pour cela, il peut choisir n'importe quelle logique. Si maintenant **O**, toujours dans le même rôle, parvient à la conclusion que la thèse est valide telle quelle. **O** peut alors assumer un rôle différent, et vérifier si la logique standard n'est pas trop forte par rapport à ce dont on a besoin pour démontrer la thèse. C'est cette dernière stratégie qui constitue le cœur des SSD.

Ce qui précède est loin d'épuiser les possibilités dialogiques d'étude du changement de logique. Il y a bien des variations : par exemple, on pourrait penser que le SSD est activé à l'occasion d'une hypothèse problématique de la logique standard, bien que cette hypothèse ne soit pas directement liée à a thèse. Mais nous nous en tiendrons là pour le moment.

2. TABLEAUX

Le propos de cette section est de montrer l'échec de la stratégie connue sous le nom de *strategie Hintikka*, concernant la manière d'implémenter la notion de relation d'accessibilité lors de la construction des systèmes de tableaux pour les logiques modales non normales. Le problème que nous allons discuter sembler s'appliquer aussi aux techniques de « propositionnalisation » des *frame conditions*, telles qu'elles sont en vigueur dans les langages hybrides.

Commençons par présenter le système de tableaux qui résulte de notre dialogique.

2.1 TABLEAUX DIALOGIQUES POUR LOGIQUES MODALES NON-NORMALES

Comme il est expliqué dans l'Appendice, les jeux dialogiques stratégiques introduits plus haut fournissent les éléments pour construire une notion de validité explicitée dans un système de tableaux, où chaque branche du tableau est un dialogue. Suivant l'idée séminale à l'origine de la dialogique, cette notion est obtenue via la notion de théorie des jeux de *stratégie de victoire*. X possède une stratégie de victoire s'il existe une fonction qui, pour tout coup possible de Y, donne le coup correct de X assurant le gain de la partie.

C'est un fait bien connu que les tableaux sémantiques habituels, dans la forme d'arbre que nous devons à Raymond Smullyan, sont directement liés aux tableaux de stratégie engendrés par les jeux dialogiques, joués pour tester la validité (au sens défini par chaque système). Par exemple :

<table>
<tr><th>Cas-(O)</th><th>Cas-(P)</th></tr>
<tr><td>Σ,(O)<i>A</i>→<i>B</i>

Σ,(P)<i>A</i>, ... | Σ,<(P)<i>A</i>> (O)<i>B</i></td><td>Σ,(P)<i>A</i>→<i>B</i>

Σ,(O)<i>A</i>,
Σ,(P)<i>B</i></td></tr>
</table>

La barre verticale « | » indique une alternative pour **O**, **P** doit avoir une stratégie de défense pour les deux cas (dialogues) possibles. Σ est un ensemble d'expressions dialogiques signées. Les signes « < » et « > » signalent que ce qu'ils encadrent sont des coups, mais non une formule qu'on pourrait attaquer. L'élimination d'expressions comme <(**P**)*A*> et la substitution à **P** de **F(alse)** et à **O** de **T(rue)** engendre le tableau signé standard pour le conditionnel.

Cependant, à proprement parler (comme il est discuté dans Rahman/Keiff [2004]), les tableaux résultant ne sont pas tout à fait les mêmes. Un caractère propre aux dialogues est la fameuse règle formelle (SR-ST4), qui est responsable de bien des difficultés dans la preuve de l'équivalence entre la notion dialogique et la notion vérifonctionnelle de validité. Le rôle de la règle formelle, dans ce contexte, est de produire des jeux dialogiques explicitant l'éventuelle stratégie de victoire de **P**, et dont les branches ne contiendraient aucune redondance. La règle formelle fonctionne donc comme un filtre éliminant les redondances, produisant ainsi un système de tableaux ayant un air de déduction naturelle. Ce rôle peut-être généralisé pour tous les types de dialogique. Une fois que ceci est explicite, la connection entre les notions dialogique et vérifonctionnelle de validité devient transparente.

Commençons par les tableaux pour la logique modale normale présentée dans Rahman/Rückert 1999 et améliorée dans Blackburn 2001 (bien que la notion y soit légèrement distincte de celle utilisée ici).

(O)-cases	**(P)-cases**
(O) ∇A m ------------------- <(P)?$_{\nabla}$ n#>(O)A_{Ls} n le contexte n does n'est pas nécessairement nouveau	(P)∇A m -------------------- <(O))?$_{\nabla}$ n>(P) A_{Li} n le contexte n est nouveau
(O)$\not\subset A$ m --------------------- <(P)?>(O) A n le contexte n est nouveau	(P)$\not\subset A$ m ------------------------- <(O)?>(P)A n# le contexte n does n'est pas nécessairement nouveau

« m» et « n » désignent des contextes, "#" restraint les choix de **P** en fonction des propriétés de la relation d'accessibilité qui définissent la logique modale corespondante. Les contextes dialogiques sont toujours des ensembles de coups. Ces contextes peuvent avoir un nombre fini ou dénombrablement infini d'éléments, semi-ordonnés par une relation de succession, suivant les règles définissant un arbre. La thèse est par hypothèse assertée dans le contexte qui sert de racine à l'arbre. Le contexte d'origine est numéroté 1. Ses *n* successeurs immédiats sont numérotés 1.*i* (pour *i*=1 à *n)* etc… Un successeur immédiat d'un contexte *m.n* est dit de *rang+1*, le prédécesseur immédiat *m* de *m.n* est dit de *rang -1*, etc. pour des rangs arbitrairement supérieurs et inférieurs.

Je laisse la discussion de la spécification de # à la section suivante, et présente maintenant les tableaux pour les dialogiques non normales.

(O)-*cases*	**(P)-*cases***
(O)∇*A* *m* ------------------- <(P)?$_{\nabla}$ *n*#/ *Ls* >(O) A_{Ls} *n* le contexte *n* n'est pas nécessairement nouveau la logique de *m* est la logique standard *Ls*	(P)∇*A* *m* -------------------- <(O))?$_{\nabla}$ *n*/ *Li* >(P) A_{Li} *n* le contexte *n* est nouveau La logique *Li* de *n* est differente de *Ls* ssi *m* est non normal
(O)⊄*A* *m* --------------------- <(P)?>(O) A_{Li} *n* le contexte *n* est nouveau La logique *Li* de *n* est differente de *Ls* ssi *m* est non normal	(P)⊄*A* *m* ------------------------- <(O)?>(P) A_{Ls} *n*# le contexte *n* n'est pas nécessairement nouveau la logique de *m* est la logique standard *Ls*

La règle de clôture :

- *Clôture d'une branche* :

  Aucune branche ne peut fermer à cause des coups (P)*a* et (O)*a* si ces coups correspondent à des jeux dont la logique est différente.

Pour produire S.05, il suffit d'ajouter l'implémentation suivante de la relation d'accessibilité :

Conditions de normalité SO5 :

1. Le contexte initial du dialogue est normal. Aucun autre contexte que celui-ci ne sera considéré comme normal.
2. La logique standard choisie par **P** est la logique classique ***Lc***.

3. **P** ne peut pas :
   - Choisir un contexte dont la logique est différente de la logique standard
   - Changer la logique d'un contexte *m* si *m* a été généré à partir d'un contexte non-normal.

Pour S2, on ajoute :

Conditions de normalité S2 :

- Si **O** a asserté dans un contexte *m* une formule de forme A (ou si **P** a asserté en *m* une formule de forme $\Diamond A$), alors le contexte *m* *peut* être considéré comme normal.
- Un contexte normal peut seulement être généré à partir d'un contexte normal.

La construction des tableaux suit immédiatement.

2.2 COMMENT NE PAS IMPLÉMENTER LES RELATIONS D'ACCESSIBILITÉ

En dialogique, les propriétés de la relation d'accessibilité peuvent être implémentées ainsi :

(SR-ST9.2T) (T) : **O** peut choisir tout contexte dialogique que les autres règles autorisent. Lors d'un choix de contexte dialogique **P** peut choisir un contexte dialogique inférieur de degré 1 déjà existant.

(SR-ST9.2B) (B) : **O** peut choisir tout contexte dialogique que les autres règles autorisent. Lors d'un choix de contexte dialogique **P** peut choisir un contexte dialogique inférieur ou supérieur de degré 1 déjà existant.

(SR-ST9.2S4) (S4) : **O** peut choisir tout contexte dialogique que les autres règles autorisent. Lors d'un choix de contexte dialogique **P** peut choisir un contexte dialogique inférieur déjà existant de degré quelconque.

(SR-ST9.2S5) (S5) : **O** peut choisir tout contexte dialogique que les autres règles autorisent. Lors d'un choix de contexte dialogique **P** peut choisir un contexte dialogique déjà existant quelconque.

D'autre part, on pourrait construire la transitivité des règles pour S4 dans le système de tableaux de cette manière :

$$
\begin{array}{c}
(O)\nabla A\ m \\
n = m{>}{+}1 \\
\hline
{<}(P)?_{\nabla}\ n{>}(O)A_{Ls}\ n
\end{array}
$$

Il existe une autre manière de réaliser cela, qui est connectée à l'idée de trouver dans le langage objet des formules qui expriment les *frame conditions* : l'idée a été utilisée par Hintikka pour construire ses tableaux, et on la connaît aujourd'hui sous le nom de *stratégie Hintikka*. L'idée est audacieuse, et reflète l'esprit de la méthode axiomatique. Formulons-la en laissant de côté la question du choix de la logique :

$$
\begin{array}{c}
(O)\ \nabla A\ m \\
n = m{>}{+}1 \\
\hline
{<}(P)?_{\nabla}\ n{>}(O)\ \nabla A\ n
\end{array}
$$

Si la formule ∇A vaut en m alors alors elle devrait aussi valoir en n pourvu que n soit accessible depuis m. La règle découle de l'idée que la transitivité est associée à la formule $\nabla A \rightarrow \nabla\nabla A$.

La transitivité « vers le haut » de S5 peut être formulée de la même manière. En fait, la seule chose dont on ait besoin, c'est de la règle pour K. Ensuite, dès qu'un contexte a été « généré », on peut utiliser les règles définissant les autre systèmes modaux pour le « remplir » (Hintikka parle de « *filling rules* »). La simplicité et l'élégance conceptuelle de cette stratégie l'a rendue très populaire[12] et elle est liée à une stratégie plus radicale de formalisation, comme celle des *langages hybrides*[13]. Dans ces derniers, l'idée est de tranférer complètement les propriétés des relations d'accessibilité dans le langage-objet de la logique propositionnelle modale, auquel on ajoute des dispositifs formels permettant de « nommer des

[12] Voir par exemple Fitting [1983], p. 37, Fitting/Mendelsohn [1998], p.52, Girle [2000], pp.32-34.

[13] Cf. Blackburn [2001] et Blackburn/de Rijke/Venema [2002].

contextes » comme l’opérateur @. La motivation, pour l’opérateur @, est de distinguer entre l’assertion que la formule *A* peut être défendue dans le contexte $\mathcal{m}$ et le contexte $\mathcal{n}$ où cette assertion est effectuée (qui peut être différent de $\mathcal{m}$). Les propriétés de la relation d’accessibilité peuvent alors être formulées comme des propositions. Un problème pour l’application générale de la stratégie Hintikka, est que certaines propriétés de la relation ne correspondent à aucune formule du langage modal orthodoxe : l’irréflexivité, l’asymétrie, l’antisymétrie, etc… Le but des langages hybrides est de combler cette carence, et appliquer ensuite la stratégie Hintikka.

La stratégie hybride semble à première vue très attractive dans notre interprétation de la logique modale non normale, où la concession de la normalité correspond en fait à la concession de la règle définissant la logique standard. Si la logique standard est modale, alors la concession, formulée dans le langage hybride, correpond à l’addition d’une prémisse. S’il s’agit vraiment d’une prémisse (déterminant les *frame conditions*) alors cela semble être une bonne idée d’exprimer cette prémisse dans le même langage que celui des autres prémisses, par exemple ainsi :

$$\begin{array}{c} \text{(O) } \nabla A\ @\mathcal{m} \\ \not\subset\not\subset \mathcal{n} \rightarrow \not\subset \mathcal{n}\ @\mathcal{m} \\ \text{------------------------------} \\ <\text{(P)}?_{\nabla}\ \mathcal{n}>\text{(O) } A\ @\mathcal{n} \end{array}$$

Cependant, l’application de ces deux stratégies (Hintikka et hybride) doit être menée avec prudence. Sinon, nous pourrions convertir (si on joue avec S3 par exemple) un contexte non normal en contexte normal en faisant l’hypothèse que la relation d’accessibilité est transitive[14]. En fait, tout système non normal avec transitivité (et détermination dynamique des contextes normaux) s’effondre immédiatement en un système normal. Mais la normalité est un caractère des contextes et non de la relation d’accessibilité.

[14] Cf. Girle [2000], p. 187 où l’exercice 3.3.1. 2(a) montre comment une telle erreur s’est glissée dans le système.

L'intérêt de S3 est de montrer que l'on peut avoir la transitivité sans la nécessitation. Sans doute, les défenseurs des stratégies mentionnées pourraient se défendre en ajoutant la clause que la règle ne s'applique qu'à la condition que les contextes soient normaux. Et de fait, Fitting utilise cette méthode dans son livre de 1983 (p. 274).

Quoiqu'il en soit, cette perte de généralité provoque, au moins chez l'auteur de cet article, un étrange sentiment. Le sentiment d'avoir été victime d'un tour d'illusioniste. La transitivité parle de l'accessibilité entre contextes, et non de la nécessitation dans les contextes normaux. Les langages hybrides semblent être le développement conséquent d'une notion apparentée à celle d'Hintikka, et il est possible qu'ils aient à payer le même prix. En termes dialogiques, on pourrait dire que la propositionnalisation des *frames conditions* a pour effet de produire une nouvelle (extension d'une) logique, sans réellement changer les règles de la sémantique globale et locale. Ceci est comparable à la production de la logique classique à partir de la logique intuitionniste plus le tiers-exclu comme concession (ou comme axiome) déterminé par les circonstances d'un contexte donné. Il est vrai qu'ainsi on engendre les théorèmes classiques au sein de la sémantique (locale et structurelle) intuitionniste. Supposons maintenant que nous sommes dans K, et que dans un contexte donné **O** attaque une formule nécessaire $a \vee b$ de **P**. Supposons de plus que **P** a à sa disposition une « filling rule » qui lui permet d'injecter une formule nécessaire de **O** dans ce même contexte (par exemple *b*). Il est évident que **P** va gagner, et du point de vue dialogique, il gagne dans K[15]. Une autre manière de réaliser le même système serait de permettre d'ajouter les axiomes appropriés aux contextes déterminés par les règles, de façon à étendre l'ensemble des théorèmes de K sans modifier sa sémantique. Comme on l'a déjà dit, cette idée est élégante et fine, mais elle ne fonctionne pas aussi simplement s'il faut prendre en compte les contextes non normaux. Peut-être devrions nous apprendre de tout ceci que la conversion des *frame*

[15] Il pourrait de même gagner $\nabla b \rightarrow \nabla\nabla(a \vee b)$ (qui serait valide).

conditions en propositions mène à une notion de relation d'accessibilité qui n'est pas encore bien comprise[16].

ANNEXE : DIALOGIQUE STANDARD, NOTIONS FONDAMENTALES

Nous présenterons ici rapidement les notions fondamentales de la dialogique[17]. Pour cela, nous commencerons par spécifier le langage dont nous nous servons, puis nous verrons les différents types de règle qui composent le jeu pour une logique de premier ordre (classique ou intuitionniste). Nous présenterons ensuite l'extension modale de cette logique propositionnelle, avec les règles correspondant aux systèmes K, T, B, S4, S5 et D[18].

1. LE LANGAGE

Notre langage **L** se compose des symboles standards de la logique de premier ordre avec quatre connecteurs ($\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, □), deux quantificateurs ($\forall$, $\exists$), des lettres minuscules (*a*, *b*, *c*,…) pour les formules primaires,[19] des lettres capitales italiques (*A*, *B*, *C*, …)

---

[16] Il serait intéressant de relier ce problème à celui de *tonk*. Du point de vue dialogique, *tonk* produit une extension triviale parce que la particule est introduite sans support sémantique (voir Rahman/Keiff [2004]). Ici, si la sémantique de la relation d'accessibilité n'est pas changée, introduisant la distinction entre deux classes disjointes de contextes, la logique non normale s'effondre dans une logique normale correspondante.

[17] Le système présenté ici a été introduit dans la littérature suivante (liste très succinte) : Lorenzen et Lorenz [1978], Rahman [1993], Rahman et Rückert [2001b], Rahman et Keiff [2004].

[18] Nomenclature habituelle (Hughes et Cresswell [1996] par exemple).

[19] Par formule, nous entendons les traditionnelles *ebf* (*expression bien formée*), récursivement énumérables à partir de l'ensemble des formules *élémentaires*, ou atomiques, qui sont les formules ne contenant aucun connecteur. Une formule complexe est composée d'une ou plusieurs formules primaires, et de connecteurs. Les règles syntaxiques de formation des formules sont celles dont on a l'habitude :

pour les formules qui peuvent être complexes, des capitales italiques grasses (***A***, ***B***, ***C***, …) pour les prédicats, et nos constantes seront notées τ_i, où $i \in N$, et nos variables seront les usuelles (x, y, z, …).

L contient aussi deux symboles spéciaux de force : $?_{\ldots}$ and $!_{\ldots}$, où les trois points sont une place libre pour un indice, contenant une information adéquate qui sera spécifiée par les règles correspondantes. Une *expression* de **L** est soit un terme, soit une formule, soit un symbole de force. **P** et **O** sont deux autres symboles spéciaux de **L**, désignant les joueurs des dialogues. Chaque expression *e* du langage peut être augmentée d'un des symboles **P** ou **O** pour former une *expression* (*dialogiquement*) *étiquetée* (notée **P**-*e* ou **O**-*e*), signifiant dans le jeu que l'expression *e* a été jouée par le joueur **P** (respectivement **O**).[20] Nous utiliserons X et Y comme des variables désignant **P** et **O**, en faisant toujours l'hypothèse que X≠Y. D'autres symboles spéciaux seront introduits au moment où on aura besoin d'eux.

2. RÈGLES DE PARTICULE

Une *forme argumentative*, ou *règle de particule*, est une description abstraite de la façon dont on peut critiquer une formule, en fonction de son connecteur principal, et des réponses possibles à ces critiques. C'est une description abstraite en ce sens qu'elle ne contient aucune référence à un contexte de jeu déterminé. Du point de vue dialogique, on dit que ces règles déterminent la *sémantique locale*, parce qu'elles indiquent le déroulement d'un fragment du dialogue (attaque et défense) concernant *une* constante logique.

Définition (*état de jeu*) :
Un *état de jeu* est un triplet ordonné $\langle \rho, \sigma, A \rangle$ où :

---

i) toute formule élémentaire est une formule ; ii) si A est une formule, alors □A, $\forall xA$ et $\exists xA$ sont des formules ; iii) si A et B sont des formules, alors $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ et $(A \rightarrow B)$ sont des formules ; iv) rien d'autre n'est une formule.

[20] **P** et **O** abrègent **P**roposant et **O**pposant. Le proposant est le joueur qui fournit la thèse du dialogue, c'est-à-dire la formule avec laquelle le jeu commence. L'opposant assume le rôle de critique.

ρ est une assignation de rôles. Cette assignation peut être R, fonction bijective de l'ensemble des joueurs {X, Y} vers l'ensemble {?(attaque), !(défense)}, déterminant quel joueur a le rôle d'attaquant et quel joueur défend. L'assignation peut être aussi R', fonction complémentaire de R, inversant l'assignement (par exemple, si R(X)=? et R(Y)=!, alors R'(X)=! et R'(Y)=?). Les joueurs assument leur rôle en jouant l'attaque (ou la défense) fixée par la règle correspondante.

σ est une fonction d'assignation substituant, comme d'habitude, des variables aux individus.

A est une sous-formule dialogiquement labellée, avec laquelle le jeu va se poursuivre.

Les règles de particule déterminent donc quel état de jeu S' suit d'un état de jeu donné S, sans préciser encore les règles (structurelles) qui décrivent le passage de S à S'.

Quel état de jeu suit de S=$\langle$R, σ, *F*$\rangle$ pour la formule étiquetée X-*F* ?

Règle de particule pour la négation : Si *F* est de forme $\neg A$ alors S'=$\langle$R', σ, *A*$\rangle$, c'est-à-dire que Y aura pour rôle de défendre *A*, et X pour rôle de (contre)attaquer *A*.

Règle de particule pour la conjonction : Si *F* est de forme $A \wedge B$ alors S'=$\langle$R, σ, *A*$\rangle$ ou S'' =$\langle$R, σ, *B*$\rangle$, en fonction du choix de l'attaquant R(Y)=?, exprimé par les attaques $?_L$ et $?_R$ respectivement.

Règle de particule pour la disjonction : Si *F* est de forme $A \vee B$ alors S'=$\langle$R, σ, *A*$\rangle$ ou S'=$\langle$R, σ, *B*$\rangle$, en fonction du choix du défenseur R(X)=!, qui répond au coup $?_{\vee}$ de l'attaquant R(Y)=?.

Règle de particule pour la subjonction : Si *F* est de forme $A \rightarrow B$, alors S'=$\langle$R', σ, *A*$\rangle$, et il est alors possible que le jeu se poursuive vers l'état S''=$\langle$R'', σ, *B*$\rangle$, ou éventuellement dans l'ordre inverse, en fonction du choix du défenseur, qui répond au coup *A* de l'attaquant R(X)=?.

Règle de particule pour le quantificateur universel : Si *F* est de forme $\forall xAx$ alors S'=$\langle$R, σ(*x*/τ), *A*$\rangle$ pour toute constante τ choisie par l'attaquant R(Y)=? en jouant le coup $?_{\forall/\tau}$.

Règle de particule pour le quantificateur existentiel : Si *F* est de forme $\exists xAx$ alors S'=$\langle$R, σ(*x*/τ), *A*$\rangle$ pour toute constante τ choisie par le défenseur R(X)=! en réponse au coup $?_{\exists}$ de l'attaquant R(Y)=?.

3. RÈGLES STRUCTURELLES

On peut considérer un dialogue comme une séquence d'expressions étiquetées, les étiquettes[21] portant l'information concernant la signification *dans le* jeu de ces expressions. En tant que les dialogues sont des processus, ils sont dynamiquement définis par l'évolution d'un jeu, qui lie les unes aux autres ces étiquettes. En d'autres termes, l'ensemble d'expressions qui constitue un dialogue complet peut être dynamiquement déterminé par les règles d'un jeu, spécifiant comment l'ensemble peut être étendu à partir d'une formule-thèse initiale.[22] Les règles de particule font partie de la définition d'un tel jeu, mais il nous faut établir l'organisation générale du jeu, et c'est là le rôle des *règles structurelles*. En fait, tout en intégrant les règles de particule, les règles structurelles peuvent très bien déterminer un jeu où ce qui est recherché est la persuasion rhétorique et non la validité logique. Dans ce cas, la dialogique est une étude de l'argumentation en un sens plus large que le sens logique du terme.

Mais *lorsque le jeu concerne la validité des formules*, les règles structurelles doivent fournir une méthode de décision. Une formule A énoncée par **P** comme thèse d'un dialogue est valide si et seulement si **P** dispose d'une stratégie de victoire dans un jeu pour A, c'est-à-dire que les règles lui donnent la possibilité de se défendre contre toutes les attaques que les règles autorisent à **O**. Lorsque l'on ne considère que la validité des formules, il est utile de restreindre la signification du jeu dialogique. On peut alors considérer le jeu comme un processus qui détermine l'ensemble de tous les dialogues pertinents pour tester la validité de la thèse, ordonnés sous forme d'un arbre dont la racine est la thèse, et dont chaque bifurcation correspond à un choix propositionnel de **O**. **O** effectue un choix propositionnel chaque fois qu'il défend une

[21] Par étiquette, on entend ce que l'on désigne en général par *label*. Voir Gabbay [1996].

[22] La *thèse* d'un dialogue est la formule dialogiquement étiquetée avec laquelle le dialogue commence. Toute expression d'un dialogue n'est pas une formule, mais la thèse est nécessairement une formule complexe (cf. règles structurelles SR-ST0 et SR-ST4).

disjonction, qu'il répond à l'attaque contre un conditionnel,[23] ou qu'il attaque une conjonction ; cela correspond à la génération d'une nouvelle branche de l'arbre. **P** pourrait lui aussi générer une nouvelle branche à chaque choix propositionnel, mais son intérêt stratégique consiste bien entendu à rester dans la même branche.[24] Si l'on considère les dialogues comme des séquences de choix effectifs (c'est-à-dire d'actes de sujets épistémiques), on doit admettre que le joueur **O** (respectivement **P**) peut n'être pas assez malin pour se rendre compte que son intérêt est d'ouvrir (respectivement ne pas ouvrir) un nouveau dialogue (une nouvelle branche) chaque fois qu'il en a l'occasion. Cependant, puisque nous ne nous intéressons qu'à la notion intersubjective de validité des formules, et que nous voulons que l'équivalence entre les dialogues et les systèmes de preuve par tableaux se fasse par une construction aussi immédiate que possible, nous ferons l'hypothèse que chacun des joueurs suit toujours la meilleure stratégie possible. Le système qui résulte des considérations qui précèdent a pour nom *jeu stratégique*.

Voici les règles qui donnent les jeux stratégiques.

(SR-ST0) (*début de partie*) : Les expressions d'un dialogue sont numérotées, et sont énoncées à tour de rôle par **P** et **O**. La thèse porte le numéro 0, et est énoncée par **P**. Toutes les expressions paires, y compris la thèse, sont **P**-étiquetées, et toutes les expressions impaires sont des coups de **O**. Tous les coups suivant la thèse sont des réponses à un coup joué par un autre joueur, et obéissant aux règles de particule et aux autres règles structurelles.

(SR-ST1) (*gain de partie*) : Un dialogue est *clos* si et seulement si il contient deux occurrences de la même formule primaire, respectivement étiquetées **X** et **Y**, et qu'aucune de ces occurrences n'est entre crochets « < » et « > »[25] Sinon le dialogue reste ouvert. Le joueur qui a énoncé la thèse gagne le dialogue si et

[23] C'est-à-dire qu'il affirme le conséquent ou qu'il contre-attaque l'antécédent.

[24] Et bénéficier ainsi des concessions que **O** pourrait faire dans la partie du dialogue correspondant à l'autre branche, auxquelles il n'aurait pas accès si l'arbre bifurquait. Cf règle structurelle SR-ST1.

[25] La mise entre crochet d'une expression signifie qu'elle ne peut être attaquée dans ce dialogue, soit parce que ce n'est pas une formule (par exemple <$?_R$>), soit en conséquence d'un choix propositionnel de l'opposant qui engendre deux dialogues distincts. Il faut noter que les choix de l'opposant interdisent la contre-attaque *pour lui aussi.* Cf. exemples.

seulement si le dialogue est clos. Un dialogue est *terminé* si et seulement si il est clos, ou si les règles (structurelles et de particule) n'autorisent aucun autre coup. Le joueur qui a joué le rôle d'opposant a gagné le dialogue si et seulement si le dialogue est terminé et ouvert.

(SR-ST2I) ***(fermeture de tour intuitionniste)*** : A chaque coup, chaque joueur peut soit attaquer une formule complexe énoncée par l'autre joueur, soit se défendre *de la dernière attaque contre laquelle il ne s'est pas encore défendu*. On peut attendre avant de se défendre contre une attaque tant qu'il reste des attaques à jouer. Si c'est au tour de X de jouer le coup n, et que Y a joué deux attaques aux coups l et m (avec $l<m<n$), auxquelles X n'a pas encore répondu, X ne peut plus se défendre contre l.

(SR-ST2C) ***(fermeture de tour classique)*** : A chaque coup, chaque joueur peut soit attaquer une formule complexe énoncée par l'autre joueur, soit se défendre contre *n'importe quelle* attaque de l'autre joueur (y compris celles auxquelles il a déjà répondu).

(SR-ST3/SY) ***(bifurcation stratégique)*** : A chaque choix propositionnel (c'est-à-dire lorsque X défend une conjonction, attaque une disjonction, ou répond à une attaque contre un conditionnel), X peut engendrer deux dialogues distincts, qui se différencient seulement par les expressions produites par ce choix. X peut passer du premier dialogue au second si et seulement si il perd celui qu'il choisit en premier. Aucun autre coup ne génère de nouveau dialogue.

(SR-ST4) ***(usage formel des formules primaires)*** : **P** ne peut introduire de formule primaire : toute formule primaire dans un dialogue doit être introduite par **O**. On ne peut attaquer les formules primaires.

(SR-ST5) ***(tactiques de répétition)***[26] :

Lorsque l'on joue avec les règles structurelles *classiques*, **P** peut défendre (attaquer) à nouveau un quantificateur existentiel (universel) en utilisant une constante d'individu différente (mais pas nouvelle) si et seulement si la première défense (attaque) a obligé **P** à introduire une nouvelle constante. Aucune autre répétition n'est autorisée.

Lorsque l'on joue avec les règles *intuitionnistes*, **P** peut répéter une attaque si et seulement si **O** a introduit une nouvelle formule primaire qui peut maintenant être utilisée par **P**. Aucune autre répétition n'est autorisée.

---

[26] La tactique de répétition consiste (informellement) à répéter un coup inutile pour la victoire dans le jeu, simplement pour empêcher l'adversaire de gagner et obtenir le « nul », c'est-à-dire un dialogue sans fin.

4. EXEMPLE DE DIALOGUE

O			**P**		
				$(a\wedge\Box a)\rightarrow\Box a$	0
1	$(a\wedge\Box a)$	0		$\Box a$	2
3	a	2		—	
5	$\Box a$		1	$<?_R>$	4
			5	a	6

Fig. 2. **P** gagne.

Dans cet exemple, c'est le proposant qui gagne. Il peut employer en guise d'attaque la proposition atomique qui a été posée par l'opposant dans le coup 3. L'opposant n'a alors plus rien à répondre : il ne lui reste aucune attaque à jouer.

5. DIALOGUES ET TABLEAUX

Afin de préciser la relation entre le concept de validité au sens dialogique et celui de validité au sens des traditions majeures de la logique, on peut construire des systèmes de correspondance stricte montrant comment passer des dialogues aux tableaux[27]. Tous les systèmes introduits dans la littérature sont démontrés complets par rapport aux systèmes de tableaux correspondants. Voir notamment : Rahman [1993] et Rahman et Rückert [2001b] pour les systèmes présentés dans cette Annexe.

6. DIALOGIQUE MODALE

La dialogique modale est conçue pour permettre de relativiser l'assertion des formules à des contextes qui peuvent être différents. Un contexte dialogique est caractérisé :

- par le fait qu'il a été ouvert à l'intérieur du dialogue à partir de quelque autre contexte dialogique,
- par les coups qui ont été portés par **O** et **P** dans ce contexte dialogique, et

[27] Par tableaux, nous entendons ici le système de décision développé par Beth, auquel Smullyan [1968] a donné sa forme actuelle, et tels qu'on les trouve systématisés dans Gabbay et *alii* [1999].

- par le fait que quelques propositions atomiques ont le droit d'être posées dans ce contexte dialogique.

Le fait que l'assertion des formules est relativisée aux contextes oblige à reformuler la règle structurelle formelle :

SR-ST5M (*usage modal formel des formules primaires*) : **P**, dans un contexte dialogique, n'a le droit d'utiliser que les propositions atomiques que **O** a déjà posées auparavant dans le même contexte dialogique. **O** a toujours le droit d'introduire des propositions atomiques (dans la mesure où les règles de particule et les autres règles structurelles le permettent). Les propositions atomiques (dans le dialogue modal formel) ne sont pas attaquables.

Pour la notation :

A des fins ultérieures il est intéressant d'introduire un système de numérotation ainsi que quelques définitions :

- Le contexte dialogique de départ, dans lequel la thèse du dialogue est posée, est noté 1.
- Le premier contexte dialogique qui est ouvert à partir du contexte dialogique portant le numéro n est noté n.1, le second n.2, et de la même manière le m-ième $n.m$.[28]
- Un contexte dialogique n est dit supérieur à un contexte dialogique $n.m$, et de manière correspondante $n.m$ est dit inférieur à n.
- Un contexte dialogique n est pour $n.m.l$ un contexte dialogique supérieur de profondeur 2, inversement $n.m.l$ est, par rapport à n, un contexte dialogique inférieur de profondeur 2. La supériorité et l'infériorité sont ainsi définies pour des profondeurs quelconques.

Introduisons maintenant les règles de particule pour les opérateurs modaux et .

[28] Ce système de numérotation correspond précisément à celui utilisé pour les mondes possibles dans Fitting [1983].

,	*Attaque*	*Défense*
A (dans le contexte dialogique *m*)	? $_{/n}$ (pour un contexte dialogique autorisé *n*, que l'attaquant choisit)	*A* (dans *n*)
A (dans le contexte dialogique *m*)	? (dans *m*)	*A* (pour un contexte dialogique autorisé *n*, que le défenseur choisit)

Plus formellement, définissons d'abord l'état de jeu modal :

Définition (état de jeu modal) : un état de jeu modal est un n-uple $\langle\rho, \sigma, A, \lambda\rangle$ où ρ et σ sont définis comme précédemment, *A* est une formule et λ est une assignation de contextes aux formules.

Règle de particule ( ) : un état de jeu $\langle\rho, \sigma,\ A, \lambda\rangle$ est suivi par un état de jeu $\langle\rho, \sigma, A, \lambda_{A/m}\rangle$, en réponse au coup $?_{\approx/m}$ du l'attaquant, où $\lambda_{A/m}$ est l'assignation du contexte m à la formule *A* et *m* est l'indice d'un contexte dialogique choisi par l'attaquant.

Règle de particule ( ) : un état de jeu $\langle\rho, \sigma,\ A, \lambda\rangle$ est suivi par un état de jeu $\langle\rho, \sigma, A, \lambda_{A/m}\rangle$, en réponse au coup $?_{\not\subset}$ du l'attaquant, où $\lambda_{A/m}$ est l'assignation du contexte m à la formule *A* et *m* est l'indice d'un contexte dialogique choisi par le défenseur.

Les contextes accessibles au choix des joueurs sont stipulés par les définitions et les règles structurelles suivantes :

Définition (choix d'un contexte dialogique) : un contexte *m* est *choisi par X* quand X choisit l'indice du contexte *m* lorsqu'il attaque une formule de forme *A*, ou lorsqu'il défend une formule de forme *A* dans le contexte *m*. L'indice de contexte dialogique *m* est *nouveau* lorsqu'il est choisi pour la première fois. Un contexte dialogique *m* est *introduit* lorsque l'indice *m* est nouveau. Le contexte initial est considéré comme donné en même temps que la thèse, et même s'il n'a jamais été choisi, il n'est pas nouveau.

(SR-ST9.1M) : **O** peut choisir n'importe quel contexte dialogique déjà existant ou bien en ouvrir un nouveau, lorsque les autres règles le lui autorisent.[29] **P** ne peut introduire un nouveau contexte, il a seulement le droit de choisir des contextes dialogiques déjà introduits par **O**. Ses choix sont de plus restreints par les règles SR-ST9.2M et SR-ST9.3M en vigueur dans le jeu.

Pour le système K vaut le principe selon lequel **P**, lors d'un choix de contexte dialogique, <u>doit nécessairement changer de contexte.</u>

(SR-ST9.2KM) (K) : Lors d'un choix de contexte dialogique **P** peut choisir un contexte dialogique inférieur de degré 1 déjà existant.

Pour les quatre systèmes T, B, S4 et S5, la relation d'accessibilité entre contextes est réflexive. Cela signifie dialogiquement que **P** peut toujours choisir de rester dans le contexte dans lequel il est attaqué:

(SR-ST9.2TM) (réflexivité) : Lors d'un choix de contexte dialogique, il est toujours possible pour **P** de rester dans le même contexte dialogique.

Au sujet de la règle (SR-ST9.3) *T*, *B*, *S*4 et *S*5 se différencient :

(SR-ST9.3TM) (T) : **O** peut choisir tout contexte dialogique que les autres règles autorisent. Lors d'un choix de contexte dialogique **P** peut choisir un contexte dialogique inférieur de degré 1 déjà existant.

(SR-ST9.3BM) (B) : **O** peut choisir tout contexte dialogique que les autres règles autorisent. Lors d'un choix de contexte dialogique **P** peut choisir un contexte dialogique inférieur ou supérieur de degré 1 déjà existant.[30]

---

[29] Il est facile de voir que, pour des raisons stratégiques, il est préférable pour **O** d'ouvrir un nouveau contexte chaque fois que cela est possible. Cela vient du fait que **P**, dans un dialogue formel, ne peut utiliser dans un contexte donné que les propositions atomiques que **O** a déjà concédées *dans ce même contexte.* C'est pourquoi **P** s'efforcera de maintenir l'argumentation dans des contextes dialogiques où **O** a concédé de nombreuses formules (et surtout les formules pertinentes). De manière analogue, **O** essaiera toujours de faire passer l'argumentation dans de nouveaux contextes dialogiques où il n'a encore rien concédé.

[30] La possibilité de choisir un contexte dialogique supérieur correspond à la symétrie de la relation d'accessibilité dans la sémantique standard.

(SR-ST9.3S4M) (S4) : **O** peut choisir tout contexte dialogique que les autres règles autorisent. Lors d'un choix de contexte dialogique **P** peut choisir un contexte dialogique inférieur déjà existant de degré quelconque.[31]

(SR-ST9.3S5M) (S5) : **O** peut choisir tout contexte dialogique que les autres règles autorisent. Lors d'un choix de contexte dialogique **P** peut choisir un contexte dialogique déjà existant quelconque.[32]

La règle pour D (*serial frames*) transgresse le principe de formalité de l'usage des contextes dialogiques. La règle suivante se substitue donc à la règle SR-ST9.1M. Pour produire un système dialogique équivalent à D, il faut ajouter la règle SR-ST9.2KM.

(SR-ST9.1DM) (D) : **O** peut choisir tout contexte dialogique que les autres règles autorisent. P peut introduire un contexte dialogique inférieur de profondeur 1 à celui dans lequel il est attaqué. Ses autres choix sont soumis à la règle SR-ST6.2KM.

---

[31] La transformation de *T* en *S*4 consiste en ce que dans *S*4 on peut choisir des contextes dialogiques inférieurs de degré quelconque. Elle correspond à l'ajout de la transitivité de la relation d'accessibilité dans la sémantique standard.

[32] Ceci correspond dans la sémantique standard, à une relation d'accessibilité réflexive, symétrique et transitive.

RÉFÉRENCS BIBLIOGRAPHIQUES

FITTING, M.
1983 *Proof Methods for Modal and Intuitionistic Logic*, D. Reidel, Dordrecht.

GABBAY D. M.
1996 *Labelled Deductive Systems*, Oxford University Press, Oxford.

GABBAY D.M. ET *ALII*
1999 *Handbook of tableau methods*, Kluwer, Dordrecht.

HUGHES, G.E. ET CRESSWELL, M.J.
1996 *A new introduction to modal logic*, Routledge, London.

LORENZEN P.
1978 « Logik und Agon. » dans *Acti del XII Congresso Internationale de Filosofia*, Venezia, pp. 187–194, 1958. (Reproduit dans Lorenzen et Lorenz, 1978.)

LORENZEN P. ET LORENZ K.
1978 *Dialogische Logik*, WBG, Darmstadt.

RAHMAN S.
1993 *Über Dialogue, protologische Kategorien und andere Seltenheiten* , Peter Lang Verlag, Frankfurt a. M., Berlin, New York, Paris, Wien.

RAHMAN S. ET KEIFF L.
2004 « On how to be a dialogician. », à paraître dans D. Vandervecken (éd.), *Logic, Thought and Action*, Dordrecht, Kluwer, 2004.

RAHMAN S. ET RÜCKERT H.

2001a (éds.) « New Perspectives in Dialogical Logic. » Numéro spécial de *Synthèse*, 127, 2001.

2001b « Dialogische Modallogik (für T, B, S4, und S5). » dans *Logique et Analyse*, vol. 167-168, pp. 243-282, 2001.

RÜCKERT H.

2000 « Why Dialogical Logic? » dans Wansing, H. (éd.), *Essays on Non-Classical Logi*c, World Scientific, London.

SMULLYAN, R. M.

1968 *First Order Logic*, Springer Verlag, New York.

AUTRE RÉFÉRENCES

BLACKBURN, P.

2001 « Modal logic as dialogical logic. » In S. Rahman and H. Rückert [2001], 2001, 57-93.

BLACKBURN, P., DE RIJKE, M., ET VENEMA, Y.

2002 *Modal Logic*, Cambridge, Cambridge University Press.

CRESWELL, M. J.

1972 « Intensional logics and truth. » *Journal of Philosophical Logic*, vol. 1, 2-15.

FITTING, M.

1983 *Proof Methods for Modal and Intuitionistic Logic*, D. Reidel, Dordrecht.

FITTING, M. ET MENDELSOHN, R. L.

1998 *First-Order Modal Logic*, Dordrecht, Kluwer.

GIRLE, R.
1973 « Epistemic logic; language and concepts. », *Logique et Analyse*, vol. 63-64, pp. 359-373.

2000 *Modal Logics and Philosophy*, Montreal, McGill-Queen's University Press.

GRATTAN-GUINNESS, I.
1998 « Are other logics possible? MacColl's logic and some English reactions, 1905-1912. » *Nordic Journal of Philosophical Logic*, vol. 3, 1, 1998, pp. 1-16.

HINTIKKA, J.
1989 « Impossible Possible Worlds Vindicated. » *Journal of Symbolic Logic*, 4, 1975, pp. 475-484 ; modifié et réédité dans Hintikka J. et M.B., *The Logic of Epistemology and the Epistemology of Logic*, Dordrecht, Kluwer, pp. 63-72, 1989.

KRIPKE, S.
1985 « Semantical Analysis of Modal Logic II. Non-normal modal propositional calculi. » dans J. W. Addison et alia (eds), *The Theory of Models*, Amsterdam, N. Holland, pp. 202-220, 1965.

MCCALL, S.
1963 *Aristotle's Modal Syllogisms*. Amsterdam: North-Holland.

1967 « MacColl. » dans P. Edwards (éd.) *The Encyclopedia of Philosophy*, London, Macmillan, Vol. 4, pp. 545-546.

MACCOLL, H.
1906 *Symbolic Logic and its applications*, London.

PRIEST, G.
1992 "What is a Non-Normal World? *Logique et Analyse*, vol. 139-140, pp. 291-302, 1992.

1998 « Editor's introduction. » dans « Impossible Worlds. » numéro spécial du *Notre Dame Journal of Formal Logic*, vol. 3/1, pp. 481-487, 1998.

2001 *An Introduction to Non-Classical Logic*. Cambridge, Cambridge University Press.

RAHMAN, S.
1997 « Hugh MacColl – eine bibliographische Erschliessung seiner Hauptwerke und Notizen zu ihrer Rezeptionsgeschichte. » *History and Philosophy of Logic*, vol. 18, pp. 165-183, 1997.

1998 « Ways of understanding Hugh MacColl's concept of symbolic existence. » *Nordic Journal of Philosophical Logic*, vol. 3, 1, 1998, pp. 35-58.

2000 « Hugh MacColl and George Boole on Hypotheticals. » dans J. Gasser (éd.), *A Boole Anthology*, Dordrecht, Synthese-Library Kluwer, pp. 287-310, 2000.

RAHMAN, S. AND KEIFF, L.
2004 « On how to be a dialogician. » à paraître dans D. Vandervecken (éd.), *Logic and Action*, Dordrecht, Kluwer.

RAHMAN, S. AND RÜCKERT, H.
2001 (éds.) « New Perspectives in Dialogical Logic. » Special issue of *Synthèse*, 127, 2001.

2001a « Dialogische Modallogik (für T, B, S4, und S5). » *Logique et Analyse*, vol. 167-168. 243-282, 2001.

RANTALA, V.
1975 « Urn Models: a new kind of non-standard model for first-order logic. » dans *Journal of Philosophical Logic*, 4, 455-474, 1975.

READ, S.
1998 "Hugh MacColl and the algebra of implication". *Nordic Journal of Philosophical Logic*, vol. 3, 1, 1998, 59-84.

1994 *Thinking About Logic*. Oxford, Oxford University Press.

RESTALL G.
1993 "Simplified Semantics for Relevant Logics (and Some of their Rivals)", *Journal of Philosophical Logic*, vol. 22, 481-511, 1993.

WOLENSKI, I.
1998 « MacColl on Modalities. » dans *Nordic Journal of Philosophical Logic*, vol. 3, 1, 1998, 133-140.