CE QUE *NEW FOUNDATIONS* RELATIVISE

En hommage à Ernst SPECKER

Le système ensembliste inventé par Quine, exposé dans son célèbre article de 1937 intitulé « New Foundations for Mathematical Logic »[1], et désigné depuis lors sous l'abréviation NF, a connu un écho relativement limité chez les mathématiciens. Leur manque d'intérêt pour NF s'explique par la supériorité pratique de la théorie classique des ensembles (ZFC) à produire le maximum de théorèmes. Mais on peut dire surtout que la publication en 1953 d'un résultat de Specker, démontrant que NF contredit l'Axiome du choix, a probablement été une très mauvaise publicité pour le système ensembliste de Quine.

Cet état de fait n'a cependant pas empêché une minorité de logiciens et de théoriciens des ensembles à s'intéresser au système NF et à ses dérivés. Le mathématicien américain Randall Holmes a publié un article dont le titre est à lui seul suffisamment éloquent : « The Set-Theoretical Program of Quine Succeeded, but Nobody Noticed »[2]. Mais ce n'est pas, selon Holmes, NF mais NFU (NF + *Urelemente*) augmenté de l'Axiome du choix et de l'infini, qui peut être considéré comme une alternative intéressante à ZFC. La question de savoir pourquoi il en est ainsi reste, dit-il, « an intriguing mathematical question ». Holmes va jusqu'à conjecturer que, si la formulation du système NFU par Jensen[3] avait précédé le fameux théorème de Specker[4], l'intérêt qui se serait manifesté pour les théories ensemblistes munies d'un ensemble universel eût été tout autre, puisque NFU est un système dont la cohérence est démontrée (par un

---

1. Quine 1937.
2. Holmes 1994.
3. Jensen 1969.
4. Specker 1953.

théorème de l'arithmétique de Peano) et dans lequel on peut représenter les vérités de la théorie classique des ensembles (ZFC)[5]. J'ignore si une telle conjecture est justifiée. Il est cependant incontestable que, si NF et les systèmes qui en dérivent ont déjà fait l'objet chez une minorité de mathématiciens de travaux difficiles et de résultats importants, ceux-ci sont restés presque sans écho dans le monde de la philosophie analytique au sens large. Quine a reconnu l'importance et le caractère impressionnant du théorème de Specker, mais il n'en a fait presque aucun commentaire philosophique. Or je crois que l'axiomatique de NF et les principaux résultats qui en sont déduits peuvent apporter des arguments précis dans les débats difficiles de la philosophie des mathématiques.

On commencera donc, dans un premier temps, par montrer comment l'axiomatique de NF permet d'éviter les paradoxes et pourquoi elle conduit à la relativité des théorèmes ensemblistes (à travers le traitement du théorème de Cantor) inclinant ainsi au conventionnalisme dans le cadre de la théorie des ensembles dont il s'agira de montrer précisément le poids et la portée.

Ce n'est que dans un second temps qu'une analyse détaillée du théorème de Specker montre comment cette preuve infirme ou au moins relativise l'assertion philosophique de Bernays selon laquelle

> la plus faible des suppositions «platoniciennes» introduite par l'arithmétique est celle de la totalité des nombres entiers[6].

Il est bien connu que cette philosophie postule l'existence d'un monde intelligible et que les entités abstraites de ce monde sont découvertes et non inventées. Le théorème de Specker est philosophiquement remarquable parce qu'il fragilise sérieusement une forme de Platonisme anti-empiriste qui s'est édifié sur la théorie classique des ensembles, qui en effet *suppose* la totalité des nombres entiers en inscrivant celle-ci dans la liste de ses *axiomes*.

Pour comprendre mon propos, il est important de distinguer deux formes de platonisme : le Platonisme authentique (pour lequel j'emploie la majuscule) et le platonisme contemporain, qui accepte à la fois les objets abstraits et l'épistémologie empiriste. La transcendance des objets abstraits est une thèse du Platonisme : leur perfection est telle qu'ils ne sont ni inventés, ni construits, mais découverts, et le fait que nous puissions avoir un accès à leur contemplation

5. Holmes 1998, 12.
6. Bernays 1935, 53.

reste un mystère dont rendent compte les mythes Platoniciens (la réminiscence, ou chez Descartes, l'idée de la perfection divine, qui est « la marque de l'ouvrier sur son ouvrage ».) Que l'infini actuel doive être un axiome est, à mon avis, un argument en faveur d'une telle philosophie : l'infini actuel apparaît comme une idée première qui ne peut pas être dérivée du fini et de l'infini en puissance. Or Specker a *démontré* que l'infini actuel peut ne pas être un axiome dans une théorie des ensembles comme NF.

Si l'on peut construire une théorie des ensembles où l'infini actuel est un théorème, c'est-à-dire une *conséquence logique* de l'axiomatique ensembliste, alors le Platonisme n'apparaît plus comme la seule philosophie en accord avec l'édifice mathématique fondé sur ZFC, mais comme une philosophie mathématique contemporaine relative à une théorie ensembliste parmi d'autres possibles. Pour qu'un tel argument soit acceptable, il est nécessaire de montrer pourquoi NF et les systèmes qui en dérivent ne se prêtent pas nécessairement à une interprétation Platonicienne des objets abstraits que sont les ensembles. On verra enfin pourquoi les développements mathématiques du programme ensembliste de Quine peuvent être en accord avec des positions philosophiques que Quine ne rejetterait certainement pas : le relativisme ontologique et finalement un réalisme mathématique distinct du Platonisme authentique parce qu'en accord possible avec l'empirisme.

Ajoutons que l'abandon de la croyance naïve en l'existence des objets mathématiques ne signifie pas que l'on doive renoncer aux expressions de « découverte », de « surprise » et de « mystère » qui sont habituellement employées pour décrire la recherche en mathématiques. Lorsque Specker montra que le système NF contredisait l'Axiome du choix, il créa en effet la surprise, car la théorie des types que le système NF simplifiait était, elle, cohérente avec cet axiome. Cette surprise n'est pas nécessairement l'indice de l'existence d'un monde d'entités abstraites indépendantes de l'activité mentale. Il serait plus prudent de dire simplement que les univers des théories des ensembles sont définis par les règles formelles et que l'on n'aperçoit pas facilement toutes les conséquences de ces règles, ce qui suffit pour expliquer les surprises que les mathématiciens rencontrent.

Relativité de l'ontologie, signification et dénotation

La théorie NF est principalement née des réflexions sur la théorie simple des types (TT). La stratification propre à NF n'est rien d'autre que l'ambiguïté donnée à la typification. Avant Quine, Russell en avait formulé le principe. Dans NF, les types peuvent être représentés par les nombres naturels comme dans la plus simple théorie des types, mais ils sont en quelque sorte identifiés ou supprimés par l'ambiguïté de leur désignation : si une variable x dans une formule ϕ a un type n donné, et si la sous-formule « $x \in y$ » apparaît dans ϕ, alors y doit être de type $n + 1$. Si « $x = y$ » apparaît dans ϕ, alors x et y doivent être du même type. Une formule est dite *stratifiée* (*stratified*) si l'assignation des types aux variables obéit à ces contraintes, sinon elle est *non stratifiée* (*unstratified*). L'axiomatique de NF se réduit alors aux deux axiomes suivants :

> *L'extensionalité* : quel que soit x et quel que soit y, si tout élément de x est aussi un élément de y et réciproquement, alors x est y sont un seul et même ensemble.
> *Le schéma d'axiomes de compréhension :* l'extension d'une formule stratifiée est un ensemble.

Le système NF évite la réduplication encombrante de copies d'un même objet. En théorie des types, on doit admettre l'existence d'un nombre 3 différent pour chaque type. Le nombre 3 étant défini comme la collection de tous les ensembles de trois objets de type n, est lui-même de type $n + 2$. L'astuce syntaxique de la stratification nous libère de cette multiplication déplaisante des entités.

Contrairement à la plus simple des théories des types et d'une manière comparable à ZF, NF est une théorie de purs ensembles (dans le langage de Quine, « une théorie de pures classes »), c'est-à-dire une théorie sans ces éléments simples (*Urelemente*) qui ne peuvent jamais être à droite du signe d'appartenance. Cependant, à la différence de ZF, la question de l'existence des ensembles n'est nullement liée à la taille des ensembles *mais à la manière dont ceux-ci sont définis*[7].

En effet, l'ensemble M défini comme l'ensemble de tous les ensembles ne peut pas exister dans ZF puisque en vertu du théorème de Cantor l'ensemble des parties de M serait strictement plus grand que M et cela en contradiction avec la définition de M lui-même. Le théorème de Cantor interdit donc dans ZF que l'on puisse affirmer l'existence d'un ensemble *absolument* universel. La situation dans NF est complètement différente : l'ensemble universel V existe parce que sa définition « V est l'ensemble des x tels que $x = x$ » (ou, en formule, $V = \{x \mid x = x\}$) est une *formule stratifiée*.

---

7. Forster 1997.

Cette différence entre ZF et NF donne un argument intéressant aux partisans du conventionnalisme en mathématiques : il n'y a en effet pas de raison de considérer que les expressions « l'ensemble universel » ou « l'ensemble de tous les ensembles » sont des expressions qui ne peuvent pas dénoter des entités, car elles sont significatives et c'est en vertu de règles différentes qu'elles peuvent être ou ne pas être à l'origine de contradictions. L'expression « ensemble de tous les ensembles » est contradictoire dans ZF en vertu du théorème de Cantor qui s'applique dans ZF à tous les ensembles. L'existence de l'ensemble universel est en revanche impliquée par le schéma d'axiomes de compréhension de NF, alors que le théorème de Cantor sous sa forme générale échoue dans NF puisqu'il dépend d'un argument diagonal dont la formule n'est pas stratifiée. Le théorème de Cantor redevient néanmoins valable dans NF sous l'expression « l'ensemble des singletons de tout ensemble est de cardinalité strictement inférieure à la cardinalité de son ensemble puissance » et l'on peut alors dériver le corollaire selon lequel le nombre cardinal des singletons de V est strictement inférieur au nombre cardinal de V. C'est là une illustration de la relativité de l'ontologie : les vérités mathématiques de la théorie des ensembles sont relatives aux axiomatiques et peuvent dans certains cas être traduites d'une théorie dans une autre avec les contraintes qu'impose tout manuel de traduction.

Dans le cadre de la question philosophique classique des rapports entre la signification et la dénotation, NF a une caractéristique remarquable qui mérite d'être soulignée. L'axiomatique de NF s'accorde avec l'idée naturelle selon laquelle le caractère significatif d'un énoncé n'implique pas nécessairement la dénotation d'un objet auquel l'énoncé ferait référence. Une formule comme « $x \in x$ » est non significative dans ZF en raison d'un principe d'induction appliqué sur la relation d'appartenance : si nous avons une assertion qui est vraie de l'ensemble vide et qui est vraie de tout ensemble pour autant qu'elle l'est de tout élément, alors elle l'est de tous les ensembles. En revanche, si l'on raisonne dans NF, on admet que l'énoncé « $x \in x$ » est une formule significative, mais elle est non stratifiée et par conséquent n'enveloppe pas l'existence des ensembles qui sont à eux-mêmes leur propre élément. Ainsi sont d'ailleurs *évités* tous les paradoxes ensemblistes comparables au paradoxe de Russell. Puisqu'il n'y a pas d'axiome dans NF nous permettant de dire que la collection de tous les ensembles qui ne sont pas membres d'eux-mêmes est un ensemble – une formule comme « $x \notin x$ » étant non stratifiée – le paradoxe ne peut pas être formulé.

On a déjà dit que NF est directement issue de TT grâce à l'ambiguïté donnée à la typification *via* la stratification. Or, de la même façon que la *free logic* purifie la logique classique des prédicats du premier ordre de ses engagements ontologiques, le procédé syntaxique de stratification débarrasse la théorie des ensembles de l'assomption réaliste des types et c'est pourquoi l'on peut dire que NF est une *free type theory*.

Enfin, puisque aucune existence d'ensemble n'est assumée dans NF indépendamment d'une formule stratifiée qui définisse l'ensemble, NF apparaît comme une théorie dont les exigences constructives sont plus fortes que dans ZF. Il est intéressant à ce titre de comparer le schéma d'axiomes de compréhension de NF (énoncé plus haut) avec le schéma d'axiomes de séparation de ZF : $(\forall a)(\exists b)(\forall x)((x \in b) \leftrightarrow (x \in a \wedge Fx))$. Tous deux sont formulés pour permettre à la fois la définition d'ensembles à l'aide d'une propriété des éléments de ceux-ci et pour éviter la formation des paradoxes ensemblistes. Ce dernier objectif est réalisé *grosso modo* à l'aide du même procédé : *la différence de niveau* entre les ensembles et les membres de ceux-ci (à cette différence près que la stratification dans NF impose que x soit de niveau n et y de niveau $n + 1$ si la formule « $x \in y$ » indique l'existence d'un ensemble). Dans ZF, un ensemble ne peut être défini en compréhension qu'à l'intérieur d'un autre ensemble *déjà donné*, telle est la signification du schéma d'axiomes de séparation. Un tel présupposé, réaliste dans son expression puisque l'existence d'un ensemble a quelconque est la condition de la définition en compréhension d'un ensemble b, est absent de NF : c'est uniquement une formule (stratifiée) qui permet d'affirmer *l'existence* de l'ensemble.

Les axiomes différents de ZF et de NF ont des conséquences différentes relativement à l'existence de l'ensemble absolument universel. Il est possible de faire usage de l'axiome de séparation et de définir grâce à la formule ouverte $x = x$ un ensemble universel b dans ZFC, mais cet ensemble est défini par séparation, relativement à un ensemble de départ a, qui n'est pas absolument universel, b ne l'étant *a fortiori* pas non plus. La façon dont sont définis les ensembles dans ZF exclut donc la possibilité de l'existence d'un ensemble absolument universel, tout comme il exclut un complément de cet ensemble ainsi que de tout ensemble (il n'y a pas d'axiome des compléments dans ZF)[8]. En revanche, puisqu'il n'y a pas de schéma

8. Gochet & Gribomont 1994, vol. 2, 24-25.

de séparation dans NF, mais un schéma de compréhension stratifiée, il y a un ensemble absolument universel tout comme un complément évident de cet ensemble (l'ensemble vide). Tout ensemble ayant alors un complément dans NF, l'univers de NF offre une algèbre de Boole alors qu'une telle algèbre ne survit dans ZF que lorsqu'on la relativise à un ensemble arbitraire, mais non dans l'univers de ZF puisque celui-ci n'est pas un ensemble[9].

Cependant, contrairement à ce que pourrait faire imaginer le fait que NF implique l'existence d'un ensemble absolument universel, c'est cette théorie, bien plus que ZF, qui plaide en faveur du caractère conventionnel de la nature des vérités ensemblistes. Comme le souligne Holmes, une formule non stratifiée qui définit un ensemble n'implique pas l'impossibilité de l'existence d'un tel ensemble ; cela signifie simplement que, dans une théorie ensembliste à la NF, un tel ensemble *peut* ne pas exister et, en l'absence d'une formule stratifiée, nous sommes libres de rejeter une telle existence si celle-ci est problématique[10]. Il y a sans doute quelque chose de choquant pour le Platonicien à faire de l'existence ou de l'inexistence d'un ensemble non défini par une formule stratifiée une simple affaire de commodité, selon qu'un tel ensemble conduit à des difficultés ou nous laisse travailler en paix. Il peut aussi sembler étrange que la preuve de l'existence d'un ensemble repose sur la seule astuce syntaxique de la stratification. De là à penser que le système NF illustre le pragmatisme et la thèse philosophique du caractère linguistique des vérités logico-mathématiques, il n'y a qu'un pas qu'il faut se garder de franchir aussi brutalement.

L'origine de ce malaise platonicien face au programme ensembliste de Quine a pour cause la conviction que les ensembles sont des objets abstraits indépendants de l'esprit, comme tous les objets mathématiques. Faire reposer l'existence des ensembles sur un procédé syntaxique vide de contenu tout en admettant l'existence possible d'ensembles définis par des formules non stratifiées c'est, pour le platonicien contemporain, mettre les objets réels sur le même plan que les fictions. Adopter ce jugement revient à dire des ensembles ce que Frege disait du nombre : qu'ils ne sont pas plus un objet de la psychologie ou un produit de nos processus psychiques que ne l'est la mer du Nord[11]. Lorsque Gödel[12] écrit que le concept de

9. Quine 1969a, 287-289.
10. Holmes 1998, 53.
11. Frege 1969, 199.
12. Gödel 1995, 199.

« nombre entier » peut être remplacé par celui d'« ensemble » (et ses axiomes), il songe au projet classique de Frege-Russell, celui-ci pouvant, il est vrai, être mené à bien aussi bien dans ZF que dans NF. Cette traductibilité des concepts d'une théorie dans l'autre nous incline à penser qu'ils traduisent effectivement une même et unique réalité mathématique indépendante de nos constructions mentales par lesquelles nous nous efforçons d'atteindre le monde intelligible. Cette traductibilité serait cependant un argument plus troublant qu'elle ne l'est effectivement si l'indétermination de la traduction ne touchait pas ces branches de la théorie des ensembles : l'univers des ensembles de ZF n'est précisément pas un ensemble mais une classe proprement dite, *a class as many*, selon l'expression de Russell, lorsque l'univers de NF est un ensemble, *a class as one*. De tels exemples de l'indétermination de la référence conduisent à s'interroger pour savoir si le Platonisme a un quelconque intérêt à s'installer dans la théorie des ensembles pour développer ses arguments, car on peut douter qu'il existe un royaume des ensembles indépendants de nos constructions théoriques.

Cependant, comme me l'a fait remarquer Vuillemin, le Pythagorisme se passait complètement du concept d'ensemble infini des nombres entiers, et c'est à l'intérieur du Pythagorisme que le Platonisme s'est développé : cet argument suffit à soulever la question de savoir si s'attaquer au Platonisme contemporain fondé sur la théorie classique des ensembles n'est pas s'engager dans une bataille digne de Don Quichotte. Je répondrai à cette objection par un détour, en soulignant que c'est aussi le théorème de Löwenheim-Skolem (selon lequel toute théorie qui admet un modèle est également satisfaite par au moins un modèle limité aux entiers positifs) qui a été le cheval de bataille des partisans de la réduction ontologique pythagoricienne, celle-ci étant alors plus d'inspiration nominaliste que Platonicienne[13]. On connaît l'hostilité de Quine à une telle réduction : c'est parce qu'il n'existe pas de fonction délégante permettant de représenter l'univers non dénombrable des réels dans l'univers dénombrable des entiers naturels, qu'il rejette la réduction pythagoricienne impliquée par la version forte du théorème de Löwenheim-Skolem. Ce théorème, lorsqu'il dépend de l'Axiome du choix, dit que

> si une théorie est vraie et a un univers non dénombrable, alors la totalité de cet univers, à l'exception d'une partie dénombrable, est

13. Quine 1966.

> du bois mort, en ce qu'on la peut exclure du parcours de valeurs des variables sans rendre fausse aucune phrase de la théorie[14].

Or ce théorème est pour Quine une parfaite illustration de la relativité de l'ontologie :

> Les questions concernant l'ontologie d'une théorie sont dépourvues de sens dans l'absolu[15].

Mais il montre surtout que le choix d'une théorie n'est pas indifférent lorsqu'il s'agit de discuter, à l'aide de l'ontologie de cette théorie adoptée, de l'ontologie d'une théorie-objet : parce qu'un univers des réels n'est pas représentable dans celui des entiers naturels, la réduction pythagoricienne est « sans attrait ».

> [Au théorème de Löwenheim-Skolem] revient l'honneur même de stigmatiser le pythagorisme comme dénué de sens. Car il n'y pas de sens absolu à dire que tous les objets d'une théorie sont des nombres, ou qu'ils sont des ensembles, ou des corps, ou quoi que ce soit d'autre ; cela n'a pas de sens, sauf par rapport à une théorie d'arrière-plan[16].

On peut donc se débrouiller uniquement avec des entiers pour réinterpréter nos énoncés d'observation sur le monde, mais nous n'aurions pu constituer initialement notre science avec l'ontologie du pythagorisme : les nombres ne correspondent pas un par un aux réifications qui ont été notre marchepied. Il nous faut rester à portée de fonctions délégantes[17]. L'argument de Quine pourrait être un argument de poids pour un Platonisme authentique fondé sur la théorie des ensembles : nous sommes engagés dans une ontologie d'ensembles d'objets abstraits qui transcendent par leur nombre tous nos moyens de notations. Cette ontologie a, pour point de départ de son élaboration, l'ensemble infini des entiers, qui fait l'objet d'un axiome dans la théorie ZFC. L'engagement ontologique envers l'infini actuel est bien l'acte théorique qui rend problématique le nominalisme lorsque l'on sait les liens de cette position avec l'empirisme. Mais, si cet engagement peut être prouvé comme la conséquence formelle d'une axiomatique ensembliste, et non plus comme un postulat qui s'impose à l'entendement, le Platonisme contemporain

---

14. Quine 1977, 71.
15. *Ibid.*, 66.
16. *Ibid.*, 72.
17. Quine 1993.

reste possible, mais il est affaibli par la démonstration. C'est ce qu'a réussi Specker en démontrant que l'infini est un théorème de NF et non un axiome. On va donc examiner quelques propriétés de ce théorème et tenter de montrer l'importance philosophique qu'il peut avoir dans le contexte de la querelle entre le Platonisme authentique et le positivisme logique.

Remarques philosophiques sur le théorème de Specker (1953)

Dans son article original de 1937, Quine pense démontrer l'existence de $\{\ \}, \{\{\ \}\}, \{\{\{\ \}\}\}\ldots$ dans NF en raison de l'existence de la suite infinie des objets. Mais la collection formée à partir de l'itération de singletons de l'ensemble vide n'a pas de définition stratifiée et il n'est donc pas prouvé qu'elle existe. L'intuition de Quine était cependant juste au sens où l'infini est bien un théorème (difficile) du système que Specker démontra d'abord pour lui-même (dans un article qui ne fut jamais publié), puis comme corollaire de la contradiction de l'Axiome du choix dans NF. Cette démonstration, publiée en 1953, peut non seulement être considérée comme la plus importante démonstration mathématique concernant NF, mais encore comme une démonstration dont les conséquences philosophiques n'ont pas été encore suffisamment remarquées. Il serait fastidieux de reprendre pas à pas la démonstration difficile que donne Specker. J'en donne donc ici, en annexe de cet article, une version publiée par Boffa (plus brève que la preuve originale de Specker), et je ne ferai qu'insister sur les points importants du point de vue philosophique.

La preuve de Specker est construite à partir des concepts suivants :

- l'ensemble universel, $V = \{x \mid x = x\}$;
- l'ensemble vide, $\Lambda = \{x \mid x \neq x\}$;
- l'ensemble puissance de a, noté $SC(a)$;
- l'ensemble de singletons de a, noté $USC(a)$;
- le nombre cardinal de a, noté $|a|$, défini selon une formulation de Rosser (les nombres cardinaux sont des ensembles saturés d'ensembles équivalents : 1 est par exemple le nombre cardinal des ensembles avec un élément ; cette définition est celle du nombre cardinal selon Frege-Whitehead-Russell) ;
- la somme de nombres cardinaux quelconques ;

– la relation d'ordre et l'Axiome du choix donné sous la forme : « les nombres cardinaux sont munis d'un bon ordre »
– l'opération $2^{|x|}$ qui, non stratifiée, est égale à $|SC(x)|$;
– la stratification de l'opération $2^{|x|}$ qui est égale à $|SC(y)|$ lorsque $|x| = |USC(y)|$;
– l'opération T pour les nombres cardinaux : $T|a| = |USC(a)|$;
– le principe d'induction mathématique, ce principe ne supposant nullement que l'ensemble des entiers naturels soit infini. On en cite la formulation que donne Holmes :

> Soit S un ensemble de nombres naturels. Si $0 \in S$ et pour tout n, $n + 1 \in S$ si $n \in S$, il suit que $S = N$; tous les nombres naturels sont dans S.

Une formulation en termes de propriétés de nombres à la place des ensembles (telle qu'on la trouve dans la formulation de Peano : « toute propriété possédée par 0 et possédée par le successeur de tout nombre qui la possède aussi, est vraie de tout les nombres ») marchera aussi bien, du moment que ces propriétés sont exprimées par des formules stratifiées et que donc elles définissent des ensembles. On pourra admettre un axiome qui aura pour conséquence que l'induction vaut aussi dans des conditions où il n'y a pas de stratification, mais l'induction sur des conditions non stratifiées n'est pas nécessaire à l'arithmétique (ce qui a d'importantes conséquences en théorie des ensembles)[18].

À partir de ces éléments, Specker définit un ensemble $\Phi(m)$ des nombres cardinaux $m, 2^m, 2^{2^m}, \ldots$ L'opération $2^{|x|}$ n'est pas définie pour $x = V$.

Supposons V muni d'un bon ordre (et que par conséquent tout ensemble le soit), alors, si l'on note α l'élément minimal et β le plus grand élément de $\Phi(\alpha)$, 2^{β}_{2} *étant non défini*, on a $\beta > T|V|$, donc $T\beta > T^2|V|$, donc $2^{T\beta} \geq 2^{T^2|V|} = T|V|$. Si $2^{T\beta} > T|V|$, alors $\phi(2^{T\beta}) = \{2^{T\beta}\}$; et si $2^{T\beta} = T|V|$, alors $\phi(2^{T\beta}) = \{T|V|, |V|\}$. Donc :

(i) $|\phi(2^{T\beta})| = 1$ ou 2 ;
(ii) donc $|\phi(T\alpha)| = Tn + 1$ ou 2 ;
(iii) $\phi(T\alpha)$ est fini et $\alpha = T\alpha$.

---

18. Holmes 1998, 81.

Il y a contradiction entre (ii) et (iii). Il est en effet facile de montrer que n et $T(n)$ sont congrus *modulo* 3 pour tous les nombres naturels n et qu'il est donc impossible pour tout nombre naturel n d'être égal à $Tn + 1$ ou $Tn + 2$. Pour tout nombre naturel n, *on doit avoir* $n = Tn$. Or (i) et (ii) se déduisent correctement de la minimalité de α et de la maximalité β *sans valeur définie pour* 2^{β}. La conclusion est donc la suivante : l'univers de NF ne peut en aucun cas être muni d'un bon ordre (négation de l'Axiome du choix), et il est infini (corollaire) car s'il ne l'était pas, il pourrait être bien ordonné.

On doit remarquer enfin que cette réfutation de l'Axiome du choix fait usage des cardinaux non mesurables qui sont de la taille de V et qui ne sont pas « cantoriens ». (Un ensemble a est cantorien quand le nombre cardinal de a est égal au nombre cardinal de l'ensemble des singletons que l'on peut définir dans a. Tous les ensembles dénombrables sont par définition cantoriens). L'opération T sur les cardinaux joue un rôle fondamental et les cardinaux cantoriens sont aisément définis comme le point fixe de l'opération T. De la même façon, le fait que la cardinalité de V ne soit pas fixée sous T (que V ne soit donc pas cantorien) est tout aussi crucial. La preuve n'exclut donc pas que l'Axiome du choix puisse s'appliquer sans restriction à tous les ensembles cantoriens.

Le théorème de Specker signifie, comme l'écrit Boffa, que NF contient l'arithmétique. La beauté d'un tel système réside dans la démonstration, certes indirecte, de l'existence de l'infini actuel dans un système ensembliste qui ne se donne au départ que l'extensionalité (forte) et la stratification qui elle-même présuppose l'induction.

Specker démontre l'infini et la négation du choix dans NF d'une manière « diaboliquement tortueuse », pour reprendre l'adjectif par lequel Quine lui rend hommage[19]. Peut-on tirer un enseignement philosophique d'un procédé diabolique ? Il est vrai que le caractère non constructif de la preuve semble ne pas nous permettre de comprendre pourquoi NF prouve l'existence de l'infini actuel. Si bien que cette question apparaît finalement aux yeux d'un logicien spécialiste de NF comme le problème philosophique majeur soulevé par NF. On peut au contraire considérer que la preuve relève de la technicité de la théorie des nombres cardinaux et n'a pas en elle-même de signification philosophique. On

19. Quine 1969b, 350.

peut enfin considérer que le théorème de Specker prouve que, si NF est cohérent (ce que l'on ne sait toujours pas démontrer), il est impossible d'identifier un individu avec son singleton (puisque l'ensemble des singletons de *V est strictement plus petit que V*, *V* étant son propre ensemble puissance)[20]. Ces trois idées philosophiques sont dignes d'estime.

Mais il y a plus : Specker a exprimé d'une manière logiquement impeccable ce à quoi songeait Russell en 1921 et ce que Quine a cru prouver en rédigeant « New Foundations » : l'existence d'un ensemble infini dans une théorie des ensembles issue de la théorie des types. Russell raisonnait de manière informelle sur le principe d'induction mathématique. Mais un raisonnement informel ne tient pas lieu de démonstration. La démonstration de Quine était inacceptable dans le cadre de la théorie NF. Ce n'est que bien plus tard que Specker inventa un procédé dont le double résultat surprit tellement qu'il laissa dans un premier temps Bernays lui-même sceptique[21]. En prouvant que NF contredit l'Axiome du choix on pouvait croire que ce système ensembliste était définitivement rejeté par-dessus bord, selon un des mots favoris de son auteur. Il n'en était rien, puisque cette négation de l'Axiome du choix ne portait que sur les ensembles de la taille de *V*, elle n'avait de portée que locale : elle ne touchait, comme on l'a déjà dit, que les ensembles « non cantoriens », ceux que les spécialistes de NF nomment les *big cardinals* par opposition aux *large cardinals*[22]. Mais quelle est la taille de l'univers de NF, quel est le nombre cardinal de *V* ? *V* est l'univers, il contient tous les ensembles, il ne peut pas être bien ordonné, il est donc non mesurable et est infini. Il est aussi remarquable que la démonstration de l'existence de cet infini (supérieur par définition à n'importe quel autre) puisse être démontré indirectement dans NF sans que l'on puisse même démontrer que, pour tout nombre naturel n, on a $Tn = n$, puisqu'une telle formule n'est pas stratifiée et que l'induction ne peut donc pas s'y appliquer. Specker a donc démontré que l'existence d'une totalité infinie d'entiers était logiquement déductible à partir d'une structure mathématique ensembliste qui ne se donne au départ que l'extensionalité, un principe

---

20. Voir Forster 1995, 12-13 et 27.
21. Je tiens l'anecdote d'une conversation avec Specker, en juin 1999, à Berne.
22. *Large cardinal* est un concept familier du point de vue de ZF : mesurable, compact, etc. Les *big cardinals* sont les cardinaux en relation avec l'univers, ou la collection de tous les ordinaux : les cardinaux de choses qui seraient des classes propres dans ZF.

d'abstraction fondée sur l'induction (*i. e.* la stratification), et la logique classique puisque le théorème prouve finalement l'infini en faisant usage du procédé de démonstration par l'absurde. Jamais l'infini actuel n'est supposé dans la preuve, mais seulement l'indéfini, comme on l'a souligné plus haut. Specker a donc prouvé que le Platonisme ne s'impose pas nécessairement pour traduire l'Arithmétique dans la théorie des ensembles. L'infini actuel s'imposant ici comme une conséquence logique, le fait de considérer que le postulat de l'existence d'un objet abstrait qui dépasse notre entendement est une condition nécessaire au fondement de l'Arithmétique apparaît alors comme un mythe. Si l'existence de l'infini actuel n'avait jamais pu faire l'objet d'une preuve mathématique mais s'était toujours imposée comme un acte de foi, comme un axiome, le Platonisme authentique ne pourrait être ainsi fragilisé. Mais cette preuve étant apportée, le réalisme ensembliste (distinct alors du Platonisme authentique) et le pragmatisme face à la rivalité des théories des ensembles deviennent tout à fait compatibles avec l'empirisme. Forster affirme qu'il y a quelque chose de correct dans le fait de comparer une théorie des ensembles avec un ensemble universel, avec la croyance en Dieu, si Dieu est représenté ici par l'objet infini « tel que rien de plus grand ne peut être conçu », pour reprendre la formulation que donne saint Anselme dans son *Proslogion*[23]. J'aurais plutôt tendance à penser que la preuve de Specker, pour non constructive qu'elle soit, réussit à démontrer que nous pouvons dériver cet infini du fini, si l'on se donne le principe d'induction mathématique. Quine décrit donc bien correctement la relativité ensembliste et il a en un mot exprimé l'essentiel en disant qu'il y a quelque chose de diabolique dans la preuve de Specker.

Joseph VIDAL-ROSSET

Université de Bourgogne
Département de Philosophie

---

23. Forster 1995, 11.

Références

BERNAYS P. (1935), « Sur le platonisme dans les mathématiques », *L'Enseignement mathématique*, n° 35, p. 52-69.

FORSTER T.E. (1995), *Set Theory with a Universal Set, Exploring an Untyped Universe*, 2e éd., Oxford, Clarendon Press.

FORSTER T.E. (1997), « Quine's NF – 60 Years on », *American Mathematical Monthly*, vol. 104, n° 9, p. 838-845.

FREGE G. (1969), *Les Fondements de l'arithmétique*, Paris, Seuil (trad. fr. de *Grundlagen der Arithmetik*, 1884).

GOCHET P. & GRIBOMONT P. (1994), *Logique*, Paris, Hermès, 2 vol.

GÖDEL K. (1995), *Unpublished Philosophical Essays*, F.A. RODRIGUEZ-CONSUEGRA (dir.), Berlin, Birkaüser.

HOLMES R. (1994), « The Set-Theoretical Program of Quine Succeeded, but Nobody Noticed », *Modern Logic*, vol. 4, n° 1, p. 1-47

HOLMES R. (1998), *Elementary Set Theory with a Universal Set*, Bruylant-Academia, Louvain-la-Neuve (Cahiers du Centre de logique ; 10).

JENSEN R.B. (1969), « On the Consistency of a Slight (?) Modification of Quine's "New Foundations" », *Synthese*, 19, p. 250-263.

QUINE W.V.O. (1937), « New Foundations for Mathematical Logic », *American Mathematical Monthly*, 44, p. 655-660 ; réédité dans *From a Logical Point of View*, Cambridge (Mass.), Harvard University Press, 1953, 2e éd., p. 80-101.

QUINE W.V.O. (1966), « Ontological Reduction and the World of Numbers », in *The Ways of Paradoxes and Other Essays*, Cambridge (Mass.), Harvard University Press, p. 212-220.

QUINE W.V.O. (1969a), *Set Theory and its Logic*, Cambridge (Mass.), Harvard University Press.

QUINE W.V.O. (1969b), *Words and Objections, Essays on the Work of W. V. O. Quine*, D. DAVIDSON & J. HINTIKKA (dir.), *Synthese Library*, vol. 21, Dordrecht (Holland) et Boston (USA), D. Reidel.

QUINE W.V.O. (1977), *Relativité de l'ontologie et autres essais*, Paris, Aubier-Montaigne (trad. fr. par J. Largeault de *Ontological Relativity and Other Essays*, New York et Londres, Columbia University Press, 1969).

QUINE W.V.O. (1993), *La Poursuite de la vérité*, Paris, Seuil, 1993, p. 57-59, (trad. fr. par M. Clavelin de *Pursuit of Truth*, Cambridge (Mass.), Harvard University Press, 1990).

SPECKER E.P. (1953), « The Axiom of Choice in Quine's "New Foundations for Mathematical Logic" », *Proceedings of the National Academy of Science of USA*, vol. 39, n° 9, p. 972-975.

Une bibliographie complète sur NF se trouve à l'adresse URL suivante : http://math.boisestate.edu/~holmes/holmes/setbiblio.html

Annexe : L'arithmétique dans NF[24]

On a le surprenant théorème démontré par Specker :

NF $\vdash$ l'univers V n'est pas bien ordonnable.

Mais l'on prouve facilement dans NF que tout ensemble fini est bien ordonnable, d'où le corollaire :

NF $\vdash$ AI.

Preuve du théorème de Specker (1953)

Dans NF, on peut définir le cardinal $|X|$ d'un ensemble X comme l'ensemble des ensembles équipotents à X. On peut même définir l'ensemble C des cardinaux et le munir naturellement d'un ordre partiel $\leq$. Soit P_1X l'ensemble de tous les singletons définissables sur X, en formule : $P_1X = \{\{x\}|x \in X\}$. Contrairement à l'intuition, on ne peut pas former l'ensemble des couples $\langle x, \{x\}\rangle$ qui établirait une bijection de X sur P_1X parce que x et $\{x\}$ ne sont pas du même type, par conséquent il n'est en général pas vrai que $P_1X \approx X$. Ceci nous conduit à définir une opération T: $C \to C$ (qui, comme l'opération singleton, augmente le type d'une unité) comme suit :

si $\alpha = |X|$, alors $T\alpha = |P_1X|$.

On définit également une opération partielle (mais conservant le type) comme suit :

si $\alpha = |P_1X|$, alors $2^\alpha = |PX|$.

On remarque que 2^α n'est défini que pour $\alpha \leq |P_1V|$. Bien qu'on puisse avoir $|X| = |PX|$ (par exemple lorsque $X = V$), le théorème de Cantor reste néanmoins conservé sous la forme $|P_1X| < |PX|$ (*i.e.* $\alpha < |2^\alpha|$ pour $\alpha \leq |P_1V|$). En particulier on a $|P_1V| < |V|$. Si l'on pose $\Omega = |V|$, il vient

24. Cet exposé est celui donné par Maurice Boffa, dans un séminaire de théorie des modèles, tenu à l'Université de Paris VII, en décembre 1980. Le texte de ce séminaire a été publié sous le titre « La théorie des types et NF » dans le *Bulletin de la Société mathématique de Belgique*, Série A, 33, 1981, p. 21-31. Je tiens à remercier vivement le professeur Boffa de m'avoir communiqué son texte.

donc : $\Omega > T\Omega > T^2\Omega > \ldots$ D'autre part, on vérifie facilement que $T(2^{\alpha}) = 2^{T\alpha}$ pour $\alpha \leq |P_1 V|$; et comme $2^{T\Omega} = \Omega$, on voit que :

$$\Omega \underset{2^{\alpha}}{\overset{T}{\rightleftarrows}} T\Omega \underset{2^{\alpha}}{\overset{T}{\rightleftarrows}} T^2\Omega \underset{2^{\alpha}}{\overset{T}{\rightleftarrows}} \ldots$$

et l'on remarque que 2^{α} n'est pas défini pour $\alpha = \Omega$.

Pour tout cardinal α on peut enfin définir le plus petit ensemble $\phi(\alpha)$ comprenant α et fermé pour l'opération 2^{α} (ceci grâce au fait que cette opération conserve le type) ; il ne serait pas possible de définir un ensemble analogue fermé pour l'opération T. Exemples :

$$\phi(\Omega) = \{\Omega\},\ \phi(T\Omega) = \{T\Omega, \Omega\}\ldots$$

On a maintenant tous les ingrédients nécessaires à la preuve. Supposons que V soit bien ordonnable (et donc que tout ensemble le soit), alors l'ordre naturel des cardinaux est un bon ordre, donc il existe un plus petit cardinal α tel que $\phi(\alpha)$ soit fini. En notant β le plus grand élément de $\phi(\alpha)$ on a donc :

$$\phi(\alpha) = \left\{\alpha, 2^{\alpha}, 2^{2^{\alpha}} \ldots, \beta\right\},$$

d'où, par induction sur $|\phi(\alpha)|$:

$$\phi(T\alpha) = \left\{T\alpha, 2^{T\alpha}, 2^{2^{T\alpha}}, \ldots, T\beta\right\} \cup \phi(2^{T\beta})$$

c'est-à-dire

$$\phi(T\alpha) = \{T\gamma | \gamma \in \phi(\alpha)\} \cup \phi(2^{T\beta}),$$

d'où

$$|\phi(T\alpha)| = |\{T\gamma | \gamma \in \phi(\alpha)\}| \cup |\phi(2^{T\beta})| ;$$

d'où, en posant $n = |\phi(\alpha)|$,

$$|\phi(T\alpha)| = Tn + |\phi(2^{T\beta})| .$$

Mais β n'est ni inférieur ni égal à $T\Omega$, car 2^{β} n'est pas défini, donc $\beta > T\Omega$, donc $T\beta > \mathrm{T}^2\Omega$, donc $2^{T\beta} \geq 2^{T^2\Omega} = T\Omega$. Si $2^{T\beta} > T\Omega$, $\phi(2^{T\beta}) = \{2^{T\beta}\}$, et si $2^{T\beta} = T\Omega$, alors $\phi(2^{T\beta}) = \{T\Omega, \Omega\}$. Donc (i) $|\phi(2^{T\beta})| = 1$ ou 2, donc :

(ii) $|\phi(T\alpha)| = Tn + 1$ ou 2.

$\phi(T\alpha)$ est par conséquent fini, d'où $\alpha \leq T\alpha$. En fait $\alpha = T\alpha$ (sinon $\alpha = T\delta$ avec $\delta < \alpha$, donc $\phi(\delta)$ est infini, donc $\phi T(\delta)$ est infini), et finalement $n = Tn + 1$ ou 2, ce qui est absurde car n et Tn sont congrus *modulo* 3.

Nous savons donc maintenant que NF contient l'arithmétique : tout ensemble fini peut être bien ordonnable, V ne peut être muni d'un bon ordre (négation de AC), or si V pouvait être bien ordonné, il serait fini, par conséquent il est infini (preuve de l'existence de l'infini dans NF).