

SINNBESTIMMUNG ET PATTERN RECOGNITION

La philosophie des mathématiques de Wittgenstein
selon Bouveresse et Dummett

Une thèse de Wittgenstein

L'une des thèses les plus problématiques (et en même temps les plus intéressantes) qui aient été soutenues par Wittgenstein dans ses écrits sur la philosophie des mathématiques est qu'une démonstration modifie le sens de l'énoncé du théorème qu'elle démontre. Donc, selon Wittgenstein, une démonstration nous donne un nouveau critère pour établir la vérité d'un théorème.

Comme la plu(s) part des idées de Wittgenstein sur les mathématiques, cette thèse aussi – que j'appellerai la thèse de la modification conceptuelle – n'a pas été analysée d'une façon systématique dans ses écrits et a été formulée par des expressions différentes. Pour cela, comme on le fait normalement dans la littérature secondaire sur le sujet en question, il faut citer quelque passage significatif :

Quand je disais qu'une preuve introduisait un nouveau concept j'entendais quelque chose comme : la preuve ajoute un nouveau paradigme aux paradigmes du langage ; comme si on mélangeait un bleu rougeâtre particulier, qu'on détermine de quelque façon le mélange de couleurs et qu'on lui donne un nom.

[...] L'on inclinerait à dire : la preuve change la grammaire de notre langage, change nos concepts. Elle établit de nouveaux rapports et elle crée le concept de ces rapports. (Elle ne se borne pas à constater leur existence : ils n'existent pas tant qu'elle ne les a pas créés¹).

1. *Remarques sur les fondements des mathématiques*, trad. fr. M. -A. Lescourret, Paris, Gallimard, 1983, II, 31.

Il est clair que la thèse wittgensteinienne de la modification conceptuelle n'est pas intuitive : normalement on essaye de démontrer un théorème parce que l'on croit qu'il est en accord avec ce que nous connaissons et donc avec la signification des énoncés de la théorie mathématique classique. Donc, si, comme nous dit Wittgenstein, la démonstration modifie la signification du théorème, il semble qu'on ne puisse pas avoir affaire à une relation entre ce que nous voulions démontrer et ce que nous avons démontré.

Afin de rendre plus intuitive la thèse en question, il faut remarquer en premier lieu que, quand il parle de modification conceptuelle, Wittgenstein ne se réfère pas à notre compréhension psychologique de la signification du théorème : il ne s'agit pas d'acquérir un nouveau *modèle mental* ou psychologique de la signification de ce que l'on veut démontrer ; il s'agit plutôt d'apprendre un nouveau modèle pour l'*utilisation* de l'énoncé (ou des énoncés) d'un théorème dans le langage mathématique. En effet, comme le dit Crispin Wright :

« Modification conceptuelle »... devrait signifier : un changement dans le modèle de l'utilisation d'une expression constitutive de son exactitude, pour comprendre lequel nous devrions donc croire que soit demandé *fresh training* »².

Une interprétation

Dans son livre intitulé *Wittgenstein and the Turning-Point in the Philosophy of Mathematics*³, Stuart Shanker propose une interprétation de la thèse selon laquelle une démonstration modifie le sens de la proposition à démontrer. Selon Shanker, en premier lieu il faut considérer que, du point de vue de Wittgenstein, ce qui caractérise les mathématiques c'est une variété (*motley*) de systèmes de démonstrations (*Beweissysteme*) : par exemple les nombres naturels constituent un *Beweissysteme* autonome et différent des systèmes de la géométrie euclidienne et des nombres entiers. Wittgenstein a développé le concept de système de démonstrations pour appliquer

2. C. Wright, *Wittgenstein on the Foundations of Mathematics*, Londres, Duckworth, 1980, p. 43.

3. S. Shanker, *Wittgenstein and the Turning-Point in the Philosophy of Mathematics*, Londres, Croom Helm, 1986.

aux mathématiques sa nouvelle (c'est-à-dire post-*Tractatus*) conception de la signification ; conception qui est fondée sur la notion de *Satzsysteme* (système de propositions). Donc les *Beweissysteme* des mathématiques correspondent aux systèmes de propositions du langage ordinaire. La signification des énoncés qui appartiennent à chacun de ces systèmes est déterminée par la méthode particulière par laquelle on les vérifie. Dans chaque *Beweissysteme* on utilise des méthodes de vérification mathématiques, c'est à dire des calculs et des démonstrations. Les différences qu'il y a entre chacune de ces méthodes déterminent aussi les différences entre les *Beweissysteme*. Cela explique, du point de vue de Shanker, le fait que Wittgenstein considère les mathématiques comme un ensemble de techniques différentes.

Il est clair que Shanker base son interprétation sur l'analyse des œuvres wittgensteiniennes des années 1929-1934. Toutefois, il affirme que les concepts de système de propositions et de système de démonstrations sont une première formulation de la notion de jeu de langage. Donc on peut généraliser l'interprétation en question aux écrits wittgensteiniennes des années quarante.

Pour ce qui concerne la thèse de la modification conceptuelle, Shanker nous dit que Wittgenstein distingue ce qu'il appelle les calculs pour écoliers des démonstrations qui *créent* un nouveau système. Les premiers sont des calculs que l'ont fait dans le même *Beweissysteme* et ils ne nous disent rien de nouveau : il sont des algorithmes et donc par définition ils sont décidables. Les démonstrations du deuxième type sont les plus intéressantes soit du point de vue mathématique, soit du point de vue philosophique : l'exemple donné par Shanker est la démonstration par laquelle Gauss a prouvé que le refus du cinquième postulat d'Euclide n'implique pas l'adoption d'une géométrie contradictoire. Fidèle à la conception wittgensteinienne du mathématicien-inventeur (et non découvreur), Shanker nous dit que Gauss, avec sa démonstration, a créé un nouveau système. En outre, lorsqu'on est convaincu par une nouvelle démonstration, on accepte une nouvelle règle de la grammaire.

En disant qu'une démonstration du deuxième type crée un *nouveau* système, Shanker essaye de justifier la thèse de la modification conceptuelle ; en disant qu'on accepte une nouvelle *règle* de la grammaire il essaye de justifier l'insistance de Wittgenstein sur le caractère normatif des démonstrations. À ce propos, Shanker cite ce passage des *Remarques sur les fondements des mathématiques* :

Rappelons-nous que dans les mathématiques on est convaincu par des propositions de la *grammaire* ; donc l'expression, le résultat du fait que nous sommes convaincus est que nous *acceptons une règle*⁴.

Ce que Shanker ne souligne pas dans son analyse de ce passage est que, du point de vue wittgensteinien, *nous* acceptons comme valable la nouvelle règle : en effet, selon Wittgenstein (et surtout selon le Wittgenstein des années 1939-1944), les mathématiques ont une origine anthropologique et non pas divine. Donc ce qui est difficile à accepter dans l'interprétation de Shanker est une sorte de réification de la notion de *Beweissysteme* au détriment de la conception anthropologique des mathématiques (dans le sens que les mathématiques sont faites par nous et non pas dans le sens du relativisme culturel).

Cette dernière conception a un rôle très important dans l'interprétation que d'autres auteurs ont donné de la thèse de la modification conceptuelle.

Anthropologisme

L'accord qu'il y a entre la nouvelle signification (qui a été introduite par la démonstration) et la signification ancienne est, comme le dit Dummett, « *a brute fact* », rien ne l'explique.

Toutefois, il faut remarquer que l'image que Wittgenstein nous propose ne refuse pas la distinction entre ce qui est juste et ce qui ne l'est pas en mathématiques : ce qui est correct a, pour ainsi dire, une nature humaine. En effet, comme le dit Bouveresse :

Il y a évidemment une grande différence entre ce qui est correct et ce qui semble simplement correct. Mais la distinction n'existe, justement, que pour autant que *nous* la faisons, comme c'est le cas, par exemple, lorsque nous caractérisons comme une erreur objective le fait d'avoir accepté temporairement une démonstration pour laquelle nous avons découvert par la suite un contre-exemple⁵.

C'est peut être puisqu'il pensait à cette idée de modification systématique des concepts des mathématiques que Dummett a

4. *Remarques sur les fondements des mathématiques*, III, 27.

5. J. Bouveresse, *Le Pays des possibles. Wittgenstein, les mathématiques et le monde réel*, Paris, Minuit, 1988, p. 79.

proposé de faire une comparaison entre la thèse wittgensteinienne de la modification conceptuelle et la conception des mathématiques qui a été proposée par Lakatos dans son *Proofs and Refutations*⁶.

Grammaire et *Sinnbestimmung*

Il est désormais presque banal de remarquer que, dans les travaux de Wittgenstein des années 1929-1934, le concept de grammaire est central pour ce qui concerne sa conception de la signification des énoncés. En effet, comme le dit Coffa, dans les écrits en question la signification d'un énoncé n'est plus un objet, comme c'était dans le *Tractatus*, mais une place, c'est à dire sa place dans la grammaire⁷.

On sait bien aussi que, dans la première moitié des années trente, Wittgenstein croyait qu'il avait trouvé (ou inventé) une nouvelle méthode pour résoudre les principaux problèmes sémantiques et aussi philosophiques : il s'agissait d'une sorte de conception vérificationniste de la signification qu'il appliquait à différentes familles d'énoncés. Selon Coffa, le but de Wittgenstein était d'étudier d'une façon systématique – selon sa propre méthode – tous les aspects de la communication, c'est à dire d'étudier toutes les méthodes de vérification (ou de compréhension) de différentes familles d'énoncés. Le résultat que Wittgenstein envisageait d'obtenir était une sorte de clarification philosophico-linguistique, puisqu'il affirmait que, dans notre langage, beaucoup de structures syntactiques similaires dissimulaient des structures sémantiques différentes.

Dans le cadre de cette conception de la signification fondée sur les notions de grammaire, de ressemblance de famille et de vérification, les énoncés des mathématiques étaient une famille assez particulière. Comme l'a souligné Bouveresse, les propositions des mathématiques opèrent au niveau de la *Sinnbestimmung*, c'est à dire au « niveau grammatical » de la détermination du sens et non pas au « niveau descriptif » de l'utilisation du sens. Donc l'on pourrait dire que les démonstrations, les calculs et les définitions des mathématiques déterminent le sens de ce que l'on va démontrer. Il est clair que cette interprétation des idées de Wittgenstein qui est fondée

6. I. Lakatos, *Proofs and Refutations*, Cambridge, Cambridge University Press, 1976.

7. A. Coffa, *The Semantic Tradition from Kant to Carnap. To the Vienna Station*, Cambridge, Cambridge University Press, 1991.

sur la notion de détermination du sens rend plus intuitive la thèse de la modification conceptuelle.

À ce propos, il faut souligner que Wittgenstein croit que le niveau grammatical de la *Sinnbestimmung* (donc le niveau des propositions mathématiques) et le niveau descriptif de l'utilisation du sens sont très différentes l'un de l'autre : en effet son refus de la théorie des ensembles est lié à sa conviction que ces domaines sont, d'une certaine façon, inépuisables. Selon Wittgenstein la théorie des ensembles mélange les deux domaines en question. En effet, comme le dit Bouveresse, la théorie des ensembles

cherche à transformer une détermination grammaticale en une énonciation descriptive portant sur une extension infinie⁸.

Si, en simplifiant, on généralise la distinction entre niveau de la *Sinnbestimmung* et niveau de l'utilisation du sens, on pourrait dire qu'elle correspond à celle que Wittgenstein fait, dans le *Tractatus*, entre les mathématiques et le monde : comme le dit Frascolla dans son livre publié récemment :

Les mathématiques et le monde entrent en contact seulement à cause de la relation qu'il y a entre le langage mathématique et les formes logiques du langage qui représente les faits⁹.

Cette distinction entre forme logique (et *Sinnbestimmung*) d'un côté et monde de l'autre est maintenue par Wittgenstein dans tous ses écrits sur les mathématiques. Ce qui change dans les travaux post-*Tractatus* et surtout dans les travaux des années quarante, ce sont les modalités du passage de l'une à l'autre et vice versa : en effet, dans les *Remarques sur les fondements des mathématiques*, c'est la communauté linguistique qui justifie le passage des faits (soit des régularités empiriques) aux concepts (soit aux lois arithmétiques).

En tout cas, le lien qu'il y a entre régularités empiriques et lois arithmétiques est très difficile à expliquer pour Wittgenstein qui, dans ses réflexions sur les mathématiques des années quarante, est, comme le disent Dummett et Wright, « obsédé par une philosophie

8. J. Bouveresse, « Le réel et son ombre. La théorie wittgensteinienne de la possibilité », in R. Egidi (éd.), *Wittgenstein. Mind and Language*, Dordrecht, Kluwer, 1995, p. 70.

9. P. Frascolla, *Wittgenstein's Philosophy of Mathematics*, Londres, Routledge, 1994, p. 22.

empiriste des mathématiques». Pour cela il s'interroge sur la différence qu'il y a entre les démonstrations et les calculs d'un côté et les expériences de l'autre. Dummett a beaucoup réfléchi sur ce point sur lequel il a fondé son interprétation.

Nouveaux critères et conséquences logiques

Dans un article récemment publié intitulé *Wittgenstein on Necessity: Some Reflections*¹⁰, Dummett souligne que la thèse de la modification conceptuelle est «le cœur» de l'argument de Wittgenstein sur la nécessité logique. Il est connu que, selon Dummett, Wittgenstein est un conventionaliste extrême selon lequel la nécessité logique a, pour ainsi dire, des racines anthropologiques. En effet, lorsqu'on affirme que un théorème est nécessaire, on s'*engage* aussi à affirmer qu'on ne trouvera jamais un contre-exemple qui puisse mettre en discussion le théorème en question. Ce contre-exemple ne peut pas exister, puisque s'il existait, il serait en contradiction avec les conventions du langage parmi lesquelles figure l'énoncé du théorème. Toutefois, nous dit Dummett, en soutenant cette thèse on assume un point de vue «*superhuman*» (ce que Wright appelle «le point de vue olympique»). Ce faisant, on essaye de dire ce que – du point de vue du *Tractatus* – l'on ne peut pas dire.

Donc, au lieu d'assumer un point de vue divin, il faut prêter attention à nos pratiques : par exemple, si, après que l'on ait *compté* dans une chambre sept garçons et cinq filles on *dit*, sans compter encore, que dans la chambre il y a au total douze personnes, on a adopté un nouveau critère (l'addition arithmétique) qui est plus avancé et qui n'est pas en conflit avec le précédent (c'est-à-dire avec le critère du dénombrement). Selon Wittgenstein la nécessité logique consiste en l'absence de conflit entre critères différents. La source de cette nécessité, pour ainsi dire, est humaine : nous décidons qu'il n'y a pas de conflit et il s'agit d'un «*brute fact*».

Dans son livre *The Logical Basis of Metaphysics*¹¹, Dummett a utilisé (en la modifiant) l'idée wittgensteinienne de la modification conceptuelle. L'une des thèses les plus importantes du livre est que

10. M. Dummett, «Wittgenstein on Necessity: Some Reflections», *The Seas of Language*, Oxford, Oxford University Press, 1993, p. 446-461.

11. M. Dummett, *The Logical Basis of Metaphysics*, Londres, Duckworth, 1991.

l'existence du raisonnement déductif en tant que tel exerce une influence déterminante sur le concept de vérité. À ce propos, on peut penser à une communauté de parlants (*speakers*) qui se limitent à faire des assertions, à poser des questions et à donner des ordres sans utiliser des constantes logiques. Dans cette communauté, l'emploi de notions sémantiques et pragmatiques qui se rapprochent plus de « juste » ou « faux » serait possible seulement grâce à l'introduction, dans la langue en question, des instruments linguistiques qui nous permettent de faire des raisonnements déductifs¹². À cause de l'introduction de ces instruments, la signification de beaucoup d'énoncés de la langue primitive *changerait*, puisque, au sein du raisonnement déductif, il serait possible d'affirmer beaucoup d'énoncés qu'auparavant on pouvait affirmer sur la base d'une vérification directe. L'effet de la démonstration, nous dit Dummett, peut être comparé à celui de l'introduction des instruments déductifs dans l'exemple susmentionné :

...the effect of the proof is that, if we started with no other means of establishing our statements as true save the most direct one, it would extend our means of coming to recognise those statements as true. To this extent, therefore, Wittgenstein was right in saying that a proof introduces a new criterion ; if an individual proof does not do so, then at least the practice of arguing in accordance with certain principles does¹³.

Donc Dummett utilise la thèse wittgensteinienne de la modification conceptuelle dans le contexte de son analyse du rapport qu'il y a entre le concept de vérité et le concept d'inférence déductive. Pour ce qui concerne ce dernier, il faut observer qu'un procédé de raisonnement (« *a mode of reasoning* ») est valide dans la mesure où il peut augmenter notre connaissance. Dans les systèmes de logique les procédés de raisonnement sont transformés en règles d'inférence qui transmettent la vérité des axiomes aux théorèmes.

Dummett souligne le fait que le raisonnement déductif nous permet d'affirmer des énoncés dont la vérité n'est pas évidente à partir d'énoncés dont nous pouvons reconnaître la vérité de façon directe. Entre le point de départ et celui d'arrivée il y a des petits passages : de la même façon, un garçon ne peut pas dépasser en

12. E. Picardi, « Rari nantes in gurgite vasto (Michael Dummett, su significato, logica e metafisica) », *Lingua e Stile*, XXIX, 4, 1994.

13. M. Dummett, *op. cit.*, p. 347-348.

taille sa mère en un seul jour, mais il peut le faire en 365 jours. Le raisonnement déductif peut être comparé à la croissance du garçon qui est systématique : le résultat de cette croissance nous permet de reconnaître que la taille x du garçon après 365 jours a dépassé la taille z de sa mère et la taille y du garçon mesurée 365 jours avant.

Un exemple que l'on trouve souvent dans les écrits de Dummett pour démontrer qu'une démonstration et, en général, le raisonnement déductif augmente notre connaissance est le suivant : Euler a démontré que, si l'on traverse tous les ponts de Königsberg on a traversé un pont au moins deux fois. Si l'on comprend cette démonstration, on peut affirmer la proposition qu'elle démontre sans qu'il faille la vérifier d'une façon directe. Celle-ci est une différence qu'il y a entre les démonstrations et les expériences. En dernière analyse, on peut dire qu'une démonstration nous donne un moyen *indirect* pour vérifier un énoncé.

En logique les conventionalistes distinguaient les conventions directes (c'est à dire les axiomes) des conventions indirectes qui sont des conséquences que l'on dérive des axiomes. Toutefois, nous dit Dummett :

*The conventionalist were led astray by the example of the founders of modern logic into concentrating on the notion of logical or analytic truth, whereas precisely what they need to fasten on was that of deductive consequence, which is useful to think in terms of the metaphor of patterns. Even the simplest judgement imposes a pattern upon reality, a pattern in common between the variegated circumstances which would verify it... A deductive step brings about a small shift in the pattern apprehended; a series of such steps brings us to discern a pattern previously unexpected*¹⁴.

Conclusion

Comme on l'a vu, Dummett utilise une version de la thèse wittgensteinienne de la modification conceptuelle dans le cadre de sa théorie de l'inférence fondée sur la notion constructiviste de *pattern-recognition*. Peu de philosophes ont utilisé des idées de Wittgenstein sur les mathématiques.

Dummett – il faut le dire – a critiqué ce qu'il a appelé le conventionalisme extrême de Wittgenstein puisqu'il est fondé sur une

14. *Ibid.*, p. 460.

forme de «super-holisme» sémantique. Toutefois, selon Bouveresse, l'anti-holisme de Dummett ne peut pas justifier son interprétation :

Tout ce qui chez Wittgenstein va dans le sens d'une conception holiste du genre de celle qui est décrite par Dummett interdit en même temps d'utiliser ses remarques comme un plaidoyer en faveur d'une conception anti-réaliste de la proposition mathématique... Si le propre d'une proposition mathématique est, comme le soutient Wittgenstein, d'effectuer une détermination de sens, par opposition à une utilisation de sens, et si reconnaître une proposition mathématique comme vraie consiste, en réalité, à décider d'introduire une nouvelle règle pour l'usage des concepts qui y sont impliqués, il est clair que la question de savoir si la signification que nous avons conférée à nos propositions mathématiques doit être analysée en termes de conditions de vérité platoniciennes ou de conditions de vérification intuitionnistes repose sur une erreur de catégorie¹⁵.

On peut discuter trois points critiques qui concernent l'objection :

1) En premier lieu, comme le souligne Wright dans le premier chapitre de son livre, Wittgenstein refuse la conception platoniste des mathématiques en faveur de ce que l'on peut appeler anti-réalisme selon les critères qui ont été fixés par Dummett (c'est à dire anti-réalisme = refus du principe de bivalence en presque tout le domaine des mathématiques) ;

2) en deuxième lieu, il faudrait étudier les différences qu'il y a entre la conception wittgensteinienne des mathématiques des années 1929-1934, (conception fondée sur la notion de *Sinnbestimmung* et de grammaire) et celle des années 1939-1944 (conception fondée sur une sorte d'anthropologisme).

3) Enfin Dummett a montré que l'on peut essayer d'utiliser certaines idées de Wittgenstein et, en particulier, la thèse de la modification conceptuelle, dans la cadre d'une théorie constructiviste de l'inférence logique.

En dernière analyse, on peut dire qu'il y a deux tendances critiques dans la littérature secondaire sur la philosophie wittgensteinienne des mathématiques : l'une cherche à montrer la cohérence des idées de Wittgenstein, l'autre cherche à «extraire hors» d'un ensemble

15. J. Bouveresse, *Le Pays des possibles. Wittgenstein, les mathématiques et le monde réel*, p. 14-15.

hétérogène d'écrits que Wittgenstein peut-être n'a jamais eu l'intention de publier.

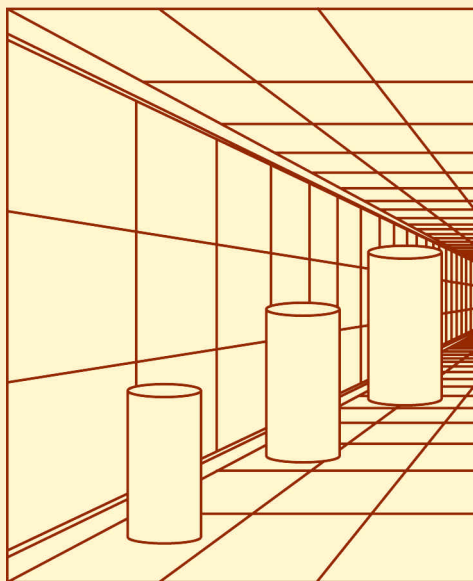
Est-il possible de concilier ces deux tendances ? Est-il possible d'utiliser des idées cohérentes dans le contexte d'une théorie systématique ?

Stéphano MANFREDI

Université de Genève

Cahiers de Philosophie
de l'Université de Caen

Philosophie analytique



1997-1998 N° 31-32

Presses Universitaires de Caen