LA LOGIQUE INTERNE DE L'ARITHMÉTIQUE CHEZ FREGE ET KRONECKER

« Wie weit man in der Arithmetik durch Schlüsse allein gelangen könnte »

Introduction

Le débat actuel sur la pertinence mathématique du projet fondationnel de Frege oppose les hétérodoxes, comme Kitcher[1], Hintikka et Sandu[2] aux orthodoxes comme Tappenden[3], Wilson[4] et Demopoulos[5] avec Dummett[6] occupant une position mitoyenne. Mais les défenseurs de Frege insistent davantage sur sa connaissance de la géométrie contemporaine que sur sa maîtrise de l'arithmétique ou de la théorie des nombres qui pourtant a fait l'objet de ses recherches principales. Je voudrais montrer que l'ignorance de la théorie des nombres de son temps a été coûteuse pour le projet de Frege et je le comparerai brièvement avec le programme de Kronecker

1. P. Kitcher, *The Nature of Mathematical Knowledge*, Oxford, Oxford University Press, 1984.
2. J. Hintikka, G. Sandu, « The Skeleton in Frege's Cupboard : the Standard *vs* Nonstandard Distinction », *The Journal of Philosophy*, vol. 89, n° 6, 1992, p. 290-315.
3. J. Tappenden, « Geometry and generality in Frege's philosophy of arithmetic », *Synthese*, n° 102, 1995, p. 319-361.
4. M.Wilson, « Frege : The Royal Road from Geometry », *Noûs*, vol. 26, n° 2, 1992, p. 149-180.
5. W. Demopoulos, « Frege and the rigorization of analysis », *Philosophical Logic,* n° 23, 1994, p. 225-245.
6. M. Dummett, *Frege : Philosophy of Mathematics*, Cambridge (Mass.), Harvard University Press, 1991.

Cahiers de Philosophie de l'Université de Caen, 31-32 [cédérom], 1997-1998.

d'une arithmétique générale *allgemeine Arithmetik* ou théorie arithmétique des fonctions entières à coefficients entiers avec indéterminées (*Unbestimmte*). Je montrerai aussi brièvement comment une solution positive au problème de Frege – la logique arithmétique – lui était accessible.

Les fondements de l'arithmétique

Il est vrai que Frege dans sa théorie fondationnelle ne s'intéresse qu'à l'arithmétique élémentaire – Les *Grundlagen*[7] et les *Grundgesetze*[8] ne s'occupent que des principes ou lois fondamentales de l'arithmétique des entiers. Mais, dès 1874, Frege avait passé en revue les méthodes de calcul fondées sur une extension du concept de quantité pour sa « Venia docendi » à l'université de Iéna. L'addition apparaissait alors comme l'opération première qui engendrait l'ensemble de l'arithmétique jusqu'à la théorie des fonctions, *i.e.* sommation ou intégration. L'importance accordée à cette arithmétique additive se répercute dans la *Begriffsschrift*[9] dont la langue formelle reproduit le langage de l'arithmétique. C'est en effet ce langage ou cette logique interne que veut préserver Frege quand il insiste sur le caractère analytique des énoncés arithmétiques contre Kant et contre toute tentative de réduction empiriste, c'est-à-dire que le concept arithmétique a un statut logique indépendant à la fois de l'intuition et de l'expérience. On sait qu'il s'en remettra à la fin à la géométrie comme seule source de connaissance mathématique en tant qu'intuition d'un continuum spatial et temporel qui est à l'origine de l'idée d'infini ; il reconnaîtra en même temps que c'est la notion de nombre comme extension d'un concept qui a causé la faillite de son entreprise. Mais ce *post mortem* des fondements logiques n'est guère plus qu'une démission intellectuelle et la théorie du concept comme « objet indéterminé »[10] n'est pas irrécupérable.

7. G. Frege, *Die Grundlagen der Arithmetik*, C. Thiel (éd.), Hambourg, Felix Meiner, 1988.
8. G. Frege, *Grundgesetze der Arithmetik*, Iéna, H. Pohle, t. I , 1893, t. II, 1903 ; réimp. Hidelsheim, G. Olms, 1966.
9. G. Frege, *Begriffsschrift und andere Aufsätze*, I. Angelelli (éd.), Heidelberg – New York, Olms, 1977.
10. *Ibid.*, § 47.

G. Boolos et R. Heck ont montré, par exemple, que le principe de Hume [11] :

> un nombre appartient à la fois à F et à G si et seulement si F et G sont des concepts équinumériques

pouvait être intégré dans une théorie axiomatique du second ordre dans laquelle les axiomes de Peano pour zéro et successeur deviennent redondants. L'égalité extensionnelle ou dans les termes de Hume *equality in extension*[12] n'en n'est pas moins imprédicative dans la mesure même où le postulat d'induction de Peano dans sa formulation originale[13] :

> si un ensemble S de nombres naturels contient l et si, contenant un nombre arbitraire a, il contient aussi son successeur, alors S contient tous les nombres naturels,

est au deuxième ordre et correspond à l'axiome de l'infini dans la théorie axiomatique des ensembles de Zermelo-Fraenkel :

$$\exists x\ \{\varnothing \in x \wedge \forall y\ (y \in x \rightarrow y \cup \{y\} \in x)\}$$

C'est encore la théorie du nombre comme extension d'un concept lui-même objet indéterminé *unbestimmter Gegenstand* qui est responsable de l'axiome [V] des *Grundgesetze*[14] qu'on peut exprimer de la façon suivante :

$$\exists x\ \forall y\ (y \in x \leftrightarrow P\ (y))$$

où P est une propriété. L'identification ruineuse des propriétés et des ensembles (des concepts et de leur extension *Umfan*g) *i.e.* la sémantique ensembliste du nombre cardinal *Anzahl* est l'expression d'un réalisme platonicien sursaturé et n'est pourtant chez Frege que le résultat d'une entreprise qui veut asseoir le statut analytique des vérités arithmétiques dans une ontologie des objets conceptuels.

11. *Ibid.*, § 63.
12. *Ibid.*, § 71.
13. G. Peano, *Opere scelte*, Rome, Edizione Cremonese, vol. 2, 1959, p. 34.
14. *Grundgesetze der Arithmetik*.

La théorie logique

La logique, dans le projet frégéen, n'avait pour but que d'assurer la chaîne sans faille de la conséquence et il faut voir dans son recours constant à la théorie des séries l'ancrage des méthodes arithmétiques : l'ordre sériel ou linéaire est le modèle arithmétique de l'inférence logique qui ne fait que reproduire la séquence des énoncés que l'on dérive des axiomes par les définitions des constantes (*e.g.* l'implication) et des règles logiques (*e.g.* le *modus ponens*). Les exigences du calcul logique sont la brièveté, la circonscriptibilité *Übersichtlichkeit*[15] et la séquentialité (une itération sans saut). La suite ordonnée des nombres naturels et la série des termes linéaires de l'addition sont des exemples d'enchaînement qui vont de la simple consécution à la ramification et à l'auto-enroulement concentrique[16] – qui serait en quelque sorte le produit de convolution pour les séries.

La sémantique naïve de l'objet « général » et de l'extension du concept conçue comme classe ou ensemble se résume à la formulation frégéenne de la loi V :

$$'\varepsilon\, f(\varepsilon) = '\alpha\, g\, (\alpha) \leftrightarrow \forall a\ (fa = ga)$$

pour l'extension d'un concept (ou sa classe) et les objets a[17]. L'égalité générique des objets implique l'égalité des objets généraux et l'extension du concept n'est déterminée que par l'appartenance à une classe elle-même indéfinie *Umfang*. Frege a voulu voir jusqu'où on pouvait aller en arithmétique en suivant la voie déductive[18] : la suite *logique*, comme il dit, doit reproduire l'ordre sériel pour assurer l'uniformité de la démarche qui ne doit rien laisser à l'intuition. Il faut constater qu'il s'est arrêté à une théorie élémentaire des ensembles pour fonder sa théorie du concept et si l'on consent à voir dans son entreprise fondationnelle une syntaxe de la consécution plutôt qu'une sémantique de la conséquence comme chez Tarski, il faut admettre qu'il s'est arrêté trop court. La logique interne de l'arithmétique, *inhaltliche Arithmetik* (avec contenu) qu'il oppose à la *formale Arithmetik* (sans contenu), est une logique arithmétique, c'est-à-dire qu'elle n'est pas indépendante de l'arithmétique mais

---

15. *Begriffsschrift und andere Aufsätze,* p. 91.
16. *Ibid.*, § 26 : *ein ringendes Insichzurücklaufen*.
17. *Grundgesetze der Arithmetik,* §. 36.
18. *Begriffsschrift und andere Aufsätze.*

participe de son mode de construction, ce qu'un kantien appellerait sans doute mode synthétique. L'arithmétique polynomiale de Kronecker apparaît comme la véritable réalisation du rêve de Frege, celui d'une fondation logique de l'arithmétique générale, si l'on entend par logique, la logique interne de l'arithmétique et de ses extensions conservatrices au sens que la logique contemporaine donne à ce terme, c'est-à-dire que le corps des polynômes rationnels et des extensions algébriques constituent une extension conservatrice de l'anneau des polynômes qui est lui-même une extension conservatrice de l'anneau des entiers : une extension conservatrice T^+ de T sera définie par la formule :

$$T \langle \phi^A \leftrightarrow T^+ \langle \phi^A$$

pour des énoncés arithmétique ϕA. L'arithmétique générale est donc définie par l'ensemble de ses sous-théories arithmétisées. Évidemment, Kronecker utilisait un langage algébrique, celui des formes ou des polynômes homogènes. Mais il est possible de montrer comment une traduction polynomiale de la logique (connecteurs et quantificateurs) est conservatrice[19]. Frege cite à deux reprises le texte de Kronecker «Über den Zahlbegriff»[20], apparemment sans l'avoir compris, puisqu'il l'associe à la conception empiriste de Helmholtz. Kronecker défend le caractère synthétique ou la notion constructiviste de nombre naturel, mais ce n'est pas là l'essentiel : Kronecker s'attache plutôt à la généralisation du concept de nombre dans ce que j'appellerai volontiers l'arithmétique polynomiale, fondée sur le nombre ordinal et non sur la cardinalité ensembliste comme chez Frege.

La théorie des formes, la *Formenlehre* de Grassmann à Hankel, est le nom qui désigne l'objet mathématique en général ; l'appellation a une signification plus précise en théorie des nombres de Lagrange et Legendre à Gauss et Kronecker : il s'agit de polynômes homogènes et on peut parler de formes quadratiques comme

$$ax^2 + bxy + cy^2$$

19. Pour une preuve de consistance de cette traduction, cf. Y. Gauthier, « The Internal Consistency of Arithmetic with Infinite Descent », *Modern Logic*, vol. VIII, n° 3, 1997.
20. L. Kronecker, « Über den Zahlbegriff », in *Werke,* K. Hensel (éd.), New York, Chelsea, 1968, vol. II, p. 252-274.

qui sont homogènes, *i.e.* dont les variables x et y ont le même degré (exposant), et qui ont des coefficients entiers, a, b, c jouant le rôle de constantes. C'est la théorie générale des formes ou des polynômes et de leur divisibilité qui est l'objet du texte majeur sur les fondements d'une théorie arithmétique des grandeurs algébriques[21], mais c'est l'introduction d'une notion généralisée d'indéterminée *Unbestimmte* qui sera la caractéristique principale de cette arithmétique générale *allgemeine Arithmetik* des fonctions entières à coefficients entiers, comme il est dit à la fin de « Über den Zahlbegriff ». L'expression polynomiale :

$$f = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$$

avec les coefficients entiers a_1 et les indéterminées x a le sens d'un support fini (en vertu du degré n) d'une série de puissances infinie et formelle, *i.e.* sans considération de convergence de la série. Les indéterminées ici ont une fonction plus générale qu'une variable fonctionnelle, puisqu'on peut leur substituer des valeurs indéfinies (infinies ou transcendantes comme chez Steinitz). Le dessein constructiviste de Kronecker aura consisté à montrer jusqu'où on peut aller en arithmétique. Le programme de Kronecker, qu'il a réalisé en grande partie, contient le corps des fonctions rationnelles à coefficients entiers avec ses extensions algébriques ; une théorie générale de l'*élimination* va opérer la décomposition polynomiale des fonctions entières en facteurs irréductibles et la théorie algorithmique des diviseurs (ou divisibilité des multiplicités polynomiales) fournit une telle décomposition pour l'anneau des entiers et le corps des formes algébriques dans les systèmes modulaires, *i.e.* de diviseurs algébriques : la représentation linéaire (de degré 1) des grandeurs algébriques est réalisée par un nombre fini d'éléments. Hilbert[22] reconnaîtra que son théorème de la base finie pour un système de formes arbitraires est inspiré du théorème de Kronecker qui énonce que dans tout corps de fonctions algébriques il y a un nombre fini de fonctions entières tel que toute fonction entière de ce corps peut être représentée par une fonction linéaire[23]. La

21. L. Kronecker, « Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen », in *Werke*, *op. cit.*, vol. III, p. 245-387.
22. D. Hilbert, « Über die vollen Invariantensysteme », in *Gesammelte Abhandlungen*, New York, Chelsea, 1933, t. II, p. 293.
23. « Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen », p. 263.

théorie kroneckerienne des indéterminées s'appuie sur la théorie des équations (et de l'élimination des inconnues) de Gauss et Galois et introduit les indéterminées par association *Associeren* qu'on peut à leur tour éliminer à l'aide de transformations linéaires qui substituent aux indéterminées des fonctions rationnelles à coefficients entiers (équations algébriques). C'est là l'origine de la théorie de l'élimination que l'on retrouve chez Hilbert et dans toute la tradition algébrique jusque dans la théorie de l'élimination des quantificateurs (existentiels) chez Tarski et en théorie des modèles contemporaine. C'est une preuve d'existence arithmétique des grandeurs algébriques qui est au fondement de l'entreprise, selon l'expression de Kronecker[24]. Le concept d'association des indéterminées permet l'extension du domaine de l'arithmétique *Gebietserweiterung der Arithmetik* qui conserve les déterminations conceptuelles de l'arithmétique, ce que nous appellerions aujourd'hui les extensions de l'anneau naturel des polynômes, ce qui inclut le corps des nombres algébriques et le corps des nombres complexes par clôture algébrique des extensions polynomiales. La notion d'entier indéterminé peut servir d'équivalent à la notion d'objet indéterminé chez Frege, mais pour Kronecker l'entier indéterminé peut être caractérisé arithmétiquement par une fonction entière homogène :

$$F(y, z) = a0 + a_1 y^{n-1} z + a_2 y^{n-2} z^2 + \ldots + a_n z^n$$

sous la forme

$$f(f(z, y)) = f(1, y^n)\, F(y, z)$$

comme il le propose à la fin des *Grundzüge*[25].

Conclusion : Frege et Kronecker

Comment faire le lien entre la théorie frégéenne et le programme de Kronecker ? Frege parle, à la fin des *Grundlagen*[26], de déterminations conceptuelles *Begriffsbestimmungen* fécondes qui tracent les limites qui n'étaient pas apparentes au point de départ ; la chaîne déductive en dégageant les implications du concept à la manière

24. *Ibid.*, p. 296.
25. *Ibid.*
26. *Die Grundlagen der Arithmetik*, § 88.

d'un développement organique assure le lien vital entre les lois fondamentales (axiomes) et les théorèmes (énoncés dérivés). Que ce lien soit analytique, Frege ne prétend pas le démontrer ; il soutient seulement qu'il y a une connexion interne entre la logique et l'arithmétique. Si ce qui est logique se limite à la consécution ou à la suite linéaire des éléments, la logique est arithmétique et il ne serait pas difficile d'en montrer la polynomialité. Mais Frege ne s'est pas contenté de montrer qu'arithmétique et logique ne font qu'un, il a voulu faire une théorie du concept pour garantir l'objectivité du nombre. L'ontologie réaliste appuyée sur une sémantique ensembliste à laquelle il manque encore la notion de modèle, n'a pas suffi à la thèse logiciste de l'analyticité des énoncés arithmétiques. Ce que Frege y perd, c'est une conception de l'autonomie de l'arithmétique qui soit rigoureuse et interne à la théorie mathématique, ce qui était pourtant son vœu le plus cher. Kronecker, moins philosophe sans doute, y est parvenu, par d'autres moyens. Les moyens de Frege, s'ils n'ont pas porté les fruits souhaités en logique et fondements des mathématiques auront produit des analyses conceptuelles utiles pour la philosophie du langage, que ce soit les notion de sens et de référence, de concept et de contextualité. L'héritage frégéen dans la philosophie analytique se situe plus de ce côté-là que dans la thèse fondationnelle du logicisme qui s'est soldée par un échec ou encore dans la tradition logicienne de la théorie russellienne des types qui tout en rectifiant le système de Frege n'a pas pour autant réussi à légitimer l'entreprise « réductionniste » des fondements logiques de l'arithmétique et de l'ensemble des mathématiques et même si Frege reconnaît que les concepts de nombre rationnel et irrationnel se laissent ramener à celui d'entier[27], il n'a pu en donner une justification en termes d'existence arithmétique, comme l'aura fait Kronecker dans son « arithmétique générale »[28]. C'est d'ailleurs ce thème d'arithmétique générale que reprend Husserl dans sa *Philosophie der Arithmetik*[29] et bien que comme Frege, il tente de critiquer la conception kroneckerienne du nombre ordinal qu'il rapproche de celle de Helmholtz qu'il qualifie

27. *Ibid.*
28. Cf. Y. Gauthier, « Hilbert and the Internal Logic of Mathematics », *Synthese*, n° 101, 1994, p. 1-14 ; *Idem*, *La Logique interne. Modèles et applications*, Paris, Vrin, 1997.
29. E. Husserl, *Philosophie der Arithmetik. Gesammelte Schriften*, E. Stöker (éd.), Hambourg, Felix Meiner, 1992, t. I, chap. XIII.

de nominaliste, alors que Frege l'avait baptisée d'empiriste, il avoue plus tard[30] être à l'aise avec le point de vue kroneckerien, d'autant plus qu'il reproduit à peu de choses près la notion de nombre général ou forme (polynôme homogène) avec indéterminées qui était au cœur de la théorie des équations algébriques chez Kronecker. Dans la même veine, on pourrait penser que Frege dans son texte de 1904 « Qu'est-ce qu'une fonction ? » ne fait que légitimer la notion d'une arithmétique générale (à la Kronecker) lorsqu'il affirme que l'introduction de nouveaux signes est admissible en arithmétique, si l'on suppose par ailleurs que les indéterminées ne sont pas des variables fonctionnelles, mais seulement des variables « muettes » qui ne servent qu'à garantir l'extension des « expressions analytiques » ou mieux de la représentation analytique des énoncés polynomiaux dans les équations algébriques avec indéterminées – cela même si Frege semble rejeter la notion de « nombre indéterminé » dans le même texte. C'est dans ce sens, me semble-t-il, qu'il faut corriger les interprétations imprécises à la fois de Hintikka et Sandu[31] et de Demopoulos[32]. Dans ce contexte, Husserl ne cite pas Kronecker, mais on sait par ailleurs qu'il a suivi les leçons de Kronecker « Algebraische Gleichunger » avec les leçons de Weierstraß sur « Elliptische Funktionen » lors de son séjour à Berlin en 1882. On peut, sans risque d'errer, supposer que la conception de la logique chez Husserl de 1891 à 1901 correspond assez bien au point de vue de Frege, malgré le débat du psychologisme : « les sources logiques de l'arithmétique » selon le titre de Husserl « se résument à la consécution linéaire de l'addition en arithmétique élémentaire et dans la théorie des séries ». La logique de la consécution, et c'est là l'essentiel de ma thèse, a un modèle unique, *i.e.* l'arithmétique, et l'idée de système formel, chez Frege et Husserl, ne sert qu'à produire une arithmétique abstraite qui mime l'arithmétique concrète dans un langage dont on dira qu'il est analytique mais qui, en réalité, n'est que la reproduction formelle des opérations d'une arithmétique générale. On trouvera chez Wittgenstein une semblable critique du réductionnisme logiciste, de Russell en particulier[33]. Un Carnap, dont le logicisme est pourtant

30. E. Husserl, *Articles sur la logique (1890-1913)*, trad. fr. J. English, Paris, PUF, 1975, « Le concept d'arithmétique générale 1890 », p. 445.
31. J. Hintikka, G. Sandu, *op. cit.*
32. W. Demopoulos, *op. cit.*.
33. Cf. M. Marion, *Wittgenstein, Finitism, and the Foundations of Mathematics*, Oxford, Oxford University Press, 1997.

d'inspiration wittgensteinnienne, ne parviendra pas non plus dans sa *Syntaxe logique du langage* à rendre compte de l'arithmétique. La logique arithmétique opère justement le renversement de la logique en arithmétique et il est permis de penser qu'une telle logique arithmétique est la reprise de ce qu'on peut appeler le programme de Kronecker qui consistait à fonder l'ensemble des mathématiques sur la logique interne de l'arithmétique. Demopoulos et Bell[34] eux préfèrent parler de l'autonomie de l'arithmétique, que ce soit en termes kantiens ou autrement. Autonomie et auto-consistance vont de pair, mais l'auto-consistance requiert une preuve formelle (mathématique ou logique), alors que l'autonomie est un vague concept philosophique. On sait maintenant que Frege n'a pu donner forme à ce concept, c'est-à-dire une théorie axiomatique consistante de l'arithmétique telle qu'il la concevait – c'est ce que Russell l'a obligé à reconnaître. L'arithmétique générale de Kronecker, elle, est formellement auto-consistante[35]. L'arithmétique générale ou polynomiale de Kronecker a, de surcroît, généré une multiplicité de modèles arithmétiques, aussi bien en théorie des nombres qu'en géométrie algébrique (arithmétique), à tel point que, selon le critère de Frege lui-même, on pourrait suggérer que c'est le modèle qui garantie la consistance d'une théorie et non l'inverse. Malheureusement dans le cas de Frege, on n'a pas de modèle, si ce n'est une reconstruction « de second ordre », si l'on me permet ce jeu de mots final.

Yvon Gauthier

Université de Montréal

34. W. Demopoulos, J.L Bell, « Frege's Theory of Concepts and Objects and The Interpretation of Second-order Logic », *Philosophia Mathematica,* vol. 1, n° 3, 1993, p. 134-156.
35. Y. Gauthier, « The Internal Consistency of Arithmetic with Infinite Descent », *op. cit.*

DEMOPOULOS W., BELL J.L., « Frege's Theory of Concepts and Objects and The Interpretation of Second-order Logic », *Philosophia Mathematica*, vol. 1, 1993, p. 134-156.

DEMOPOULOS W., « Frege and the rigorization of analysis », *Philosophical Logic*, n° 23, 1994, p. 225-245.

DUMMETT M., *Frege : Philosophy of Mathematics*, Cambridge (Mass.), Harvard University Press, 1991.

FREGE G., *Begriffsschrift und andere Aufsätze*, I. Angelelli (éd.), Heidelberg – New York, Olms, 1977.

FREGE G., *Die Grundlagen der Arithmetik*, C. Thiel (éd.), Hambourg, F. Meiner, 1988.

FREGE G., *Grundgesetze der Arithmetik*, Iéna, H. Pohle, t. I , 1893, t. II, 1903 ; réimp. Hidelsheim, G. Olms, 1966.

FREGE G., *Kleine Schriften*, I. Angelelli (éd.), Hildesheim, Olms, 1967.

FREGE G., *Nachgelassene Schriften und wissenschaftliches Briefwechsel*, Hambourg, F. Meiner, vol. I, 1969.

GAUTHIER Y., « Hilbert and the Internal Logic of Mathematics », *Synthese*, n° 10, 1994, p. 1-14.

GAUTHIER Y., *La Logique interne. Modèles et applications*, Paris, Vrin, 1997.

GAUTHIER Y., « The Internal Consistency of Arithmetic with Infinite Descent », *Modern Logic*, vol. VIII, n° 3, 1997.

HILBERT D., « Über die vollen Invariantensysteme », in *Gesammelte Abhandlungen*, New York, Chelsea, 1933, t. II, p. 287-365.

J. Hintikka, G. Sandu, « The Skeleton in Frege's Cupboard : the Standard vs Nonstandard Distinction », *The Journal of Philosophy*, vol. 89, n° 6 , 1992, p. 290-315.

HUME D., *A Treatise of Human Nature*, L.A. Selby-Bigge (éd.), Oxford, Clarendon Press, 1978.

HUSSERL E., *Philosophie der Arithmetik. Gesammelte Schriften*, E. Stöker (éd.), Hambourg, F. Meiner, 1992, t. I.

HUSSERL E., *Articles sur la logique* (1890-1913), trad. fr. J. English, Paris, PUF, 1975, « Le concept d'arithmétique générale 1890 », p. 445-453.

KITCHER P., *The Nature of Mathematical Knowledge*, Oxford, Oxford University Press, 1984.

KRONECKER L., « Über den Zahlbegriff », in *Werke*, K. Hensel (éd.), New York, Chelsea, 1968, vol. II, p. 252-274 .

KRONECKER L., « Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen », in *Werke*, *op. cit.*, vol. III, p. 245-387.

MARION M., *Wittgenstein, Finitism, and the Foundations of Mathematics*, Oxford, Oxford University Press, 1997.

PEANO G., *Opere scelte*, Rome, Edizione Cremonese, vol. 2, 1959.

TAPPENDEN J., « Geometry and generality in Frege's philosophy of arithmetic », *Synthese*, n° 102, 1995, p. 319-361.

WEINER J., *Frege in Perspective*, Ithaca, Cornell University Press, 1990.

WILSON M., « Frege : The Royal Road from Geometry », *Noûs*, vol. 26, n° 2, 1992, p. 149-180.

Appendice

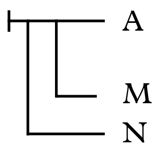
A) Règles du calcul des séquents pour l'implication

$$f(\Gamma, A \vdash B, \Delta, \Gamma \vdash A \to B, \Delta)$$

d→

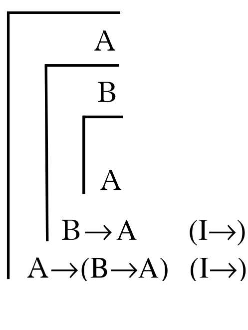
$$f(\Gamma \vdash A, \Delta \quad \wedge B \vdash \Pi, \Gamma, \wedge, A \to B \vdash \Delta\Pi) \;\; g\to$$

B) Notation de Frege pour l'implication
et le modus ponens *dans le* Begriffsschrift



C) Dérivation de la formule A → (B → A) dans le calcul des séquents et en déduction naturelle
(avec règles intélim)

$$\dfrac{\dfrac{B \vdash B \qquad A \vdash A}{\vdash B \to A}\; d\to}{\vdash A \to (B \to A)}\; d\to$$



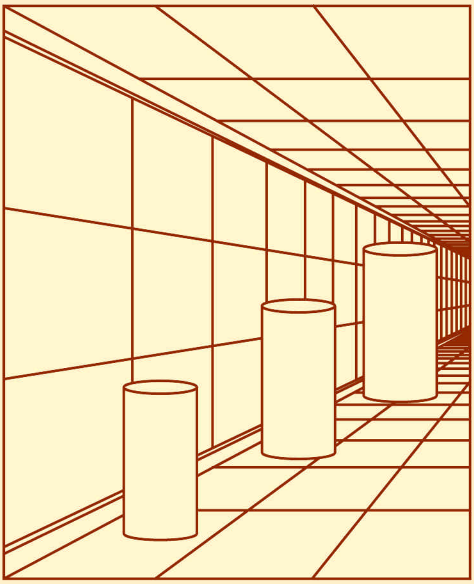
***D) Dérivation du* modus ponens**
dans le calcul des séquents et en déduction naturelle

$$
\dfrac{\vdash A \qquad \dfrac{\vdash A\to B \qquad \dfrac{B \vdash B \qquad A \vdash A}{A,\ A\to B \vdash B}\ g\!\to}{A \vdash B}\ \text{coupure}}{\vdash B}\ \text{coupure}
$$

$$
\begin{array}{|l l}
A & \\
A\to B & \\ \hline
\qquad A & \\
\qquad \begin{array}{|l} \hline A \\ A\to B \\ B \end{array} & (E\to\ ) \\
A\to B & (I\to\ ) \\
A & \\
B & (E\to\ )
\end{array}
$$

Cahiers de Philosophie
de l'Université de Caen

Philosophie analytique



1997-1998 N° 31-32

Presses Universitaires de Caen